2015 秋高二数学期中考试答案

一、填空题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）.

1. 已知二元一次方程组的增广矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则此方程组的解集为________. $\{(3,2)\}$

2. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3+2^n$，则$a_n=$______ $a_n=\begin{cases}5 & n=1\\ 2^{n-1} & n\geq 2\end{cases}$______。

3. 在行列式$\begin{vmatrix} 2 & -4 & \pi \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & e & 3 \end{vmatrix}$中，元素 5 的代数余子式的值为__________. 14

4. $\vec{e}$是单位向量，向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角是45°，且$|\vec{a}|=6$，则向量$\vec{a}$在$\vec{e}$的方向上的投影为

__________. $3\sqrt{2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-2}+3^{n+1}}{3^n-2^n}$的值为____________. 3

6. 在直角坐标系中，已知$A(2,3)$、$B(-4,0)$，点C为直线AB上一点，且$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$，则点$C$的坐标是___________. $(0,2)$

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}(n\geq 3)$，则$a_{2014}=$________. 1

8. 已知各项均为正实数的等比数列$\{a_n\}$，若$\overrightarrow{OB}=a_3\overrightarrow{OA}+a_{17}\overrightarrow{OC}$，且$A$、$B$、$C$三点共线（该直线不过点$O$），则$a_{10}$的最大值为____$\dfrac{1}{2}$____.

9. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n}$的值为_____$\dfrac{2n}{n+1}$________。

10. 向量的数量积性质：$\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}||\vec{b}|$可以用来解决某些最值问题，如：已知$m^2+n^2=1, x^2+y^2=4$，求$mx+ny$的最大值．只需令$\vec{a}=(m,n),\vec{b}=(x,y)$，则$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，$mx+ny=\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}||\vec{b}|=1\times 2=2$．利用此方法解决下面问题：

已知$x,y\in R^+$，且$x+y=10$，则$\sqrt{x}+2\sqrt{y}$的最大值等于__________. $5\sqrt{2}$

11、已知数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}-a_n=(-1)^n\cdot n$，若$a_1=3$，则$a_{100}$=____________ -47

12.已知向量序列：$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n}\cdots$满足如下条件：$|\vec{d}|=\dfrac{1}{2}$，$2\overrightarrow{a_1}\cdot\vec{d}=-1$，且$\overrightarrow{a_n}-\overrightarrow{a_{n-1}}=\vec{d}$（$n=2,3,4,\cdots$）.若$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_k}=\dfrac{7-k}{2}$，则$|\overrightarrow{a_1}|$的值为__________. $\sqrt{3}$

二、选择题：（本大题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）.

13.无穷等比数列$\{a_n\}$中,首项$a_1<0$,若$\{a_n\}$是递增数列,则公比q满足　　（　B　）

A. $q>1$　　B. $0<q<1$　　C. $-1<q<0$　　D. $q<-1$

14.在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4$，则$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$等于（　D　）

A. -16　　B. -8　　C. 8　　D. 16

15、数列$\{a_n\}$中，$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2},\ 1\leqslant n\leqslant 1000,\\ \dfrac{n^2}{n^2-2n}, n\geqslant 1001,\end{cases}$ 则数列$\{a_n\}$的极限值…………………………（　B　）

A．等于0　　B．等于1　　C．等于0或1　　D．不存在

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2-2n}=1$

16.设$f(x)$是定义在正整数集上的函数，且$f(x)$满足："当$f(k)\le k^2$成立时，总可推出$f(k+1)\le(k+1)^2$成立". 那么，下列命题总成立的是（　D　）

A. 若$f(2)\le 4$成立，则当$k\ge 1$时，均有$f(k)\le k^2$成立

B. 若$f(4)\le 16$成立，则当$k\le 4$时，均有$f(k)\le k^2$成立

C. 若$f(6)>36$成立，则当$k\ge 7$时，均有$f(k)>k^2$成立

D. 若$f(7)=50$成立，则当$k\le 7$时，均有$f(k)>k^2$成立

三、解答题（本大题满分 48 分，必须写出必要的步骤）.

17.（本题满分 8 分）已知关于 x、y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x+ty=3\\(t-1)x+y=t-2\end{cases}$ $(t\in R)$ 有无穷多组解，求 t 的值.

【解】$D=\begin{vmatrix}2 & t\\t-1 & 1\end{vmatrix}=2+t-t^2$

令 $D=0$，得 $t=-1,\text{或}2$.

$t=-1$ 时，$\begin{cases}2x-y=3\\-2x+y=-3\end{cases}$，$D_x=D_y=0$，有无穷多组解.

$t=2$ 时，$\begin{cases}2x+2y=3\\x+y=0\end{cases}$，$D_x=3\neq0(\text{或}D_y=-3\neq0)$ 方程无解.

综合得：$t=-1$.

18. （本题满分 8 分）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1+a_3=8$，$a_2+a_4=12$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；（4 分）

（2）记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_1、a_k、S_{k+2} 成等比数列，求正整数 k 的值.（4 分）

【解】（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意知

$\begin{cases}2a_1+2d=8\\2a_1+4d=12\end{cases}$ 解得 $a_1=2$，$d=2$．所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$.

（2）由（1）可得 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{(2+2n)n}{2}=n(n+1)$.

因为 a_1、a_k、S_{k+2} 成等比数列，所以 ${a_k}^2=a_1S_{k+2}$.

从而 $(2k)^2=2(k+2)(k+3)$，即 $k^2-5k-6=0$，

解得 $k=6$ 或 $k=-1$（舍去），因此 $k=6$.

19. （本题满分 10 分）设两个向量 $\vec{a}=(\lambda+2,\lambda^2-\cos^2\alpha)$ 和 $\vec{b}=\left(m,\dfrac{m}{2}+\sin\alpha\right)$，其中 λ、m、α 为实数，且 $\vec{a}=2\vec{b}$.

（1）试用 m 表示 λ；（2 分）

（2）求实数 m 的取值范围；（3 分）

（3）当实数 m 取得最大值时，求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.（3 分）

【解】由 $\vec{a}=2\vec{b}$ 得，$\begin{cases}\lambda+2=2m & ①\\\lambda^2-\cos^2\alpha=m+2\sin\alpha & ②\end{cases}$

（1）由①得，$\lambda = 2m-2$．

（2）由①、②消去λ，得$4m^2-9m=2\sin\alpha+\cos^2\alpha-4$，即$4m^2-9m=-\left(\sin\alpha-1\right)^2-2$，因为$-1\le\sin\alpha\le1$，所以$0\le\left(\sin\alpha-1\right)^2\le4$，从而$-6\le4m^2-9m\le-2$，解得$\dfrac{1}{4}\le m\le2$．

所以，实数m的取值范围是$\dfrac{1}{4}\le m\le2$．

（3）由（2）知，实数m的最大值为2，此时$\lambda=2m-2=2$，$\sin\alpha=1$，$\cos\alpha=0$，所以，$\vec{a}=\left(4,4\right)$，$\vec{b}=\left(2,2\right)$；因为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$同向，所以向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为0．

20(10 分)．已知向量$\vec{a}=\left(x^2+1\,,\,-x\ \right)$，$\vec{b}=\left(1\,,\,2\sqrt{n^2+1}\right)$（$n$为正整数），

函数$f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，设$f(x)$在(0，$+\infty$)上取最小值时的自变量$x$取值为$a_n$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式(4 分)；

（2）已知数列$\{b_n\}$，对任意正整数n，都有$b_n\cdot(4{a_n}^2-5)=1$成立，设S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$；（6 分）

（1）$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=(x^2+1,-x)\cdot(1,\ 2\sqrt{n^2+1})=x^2-2\sqrt{n^2+1}x+1$

$a_n=\sqrt{n^2+1}$

（2）$b_n=\dfrac{1}{4(n^2+1)-5}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}]$

$S_n=\dfrac{1}{2}[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]$

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}}$

21．（本题满分 12 分）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_2=6$，$\dfrac{a_{n+1}-a_n+1}{a_{n+1}+a_n-1}=\dfrac{1}{n}(n\in N^*)$．

（1）求a_1、a_3、a_4、a_5的值；（3 分）

（2）)猜想数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式a_n，并用数学归纳法证明你的猜想；（5 分）

（3）设$b_n=\dfrac{a_n}{n\cdot2^n}(n\in N^*)$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和$S_n$．（4 分）

【解】（1）$\because\dfrac{a_{n+1}-a_n+1}{a_{n+1}+a_n-1}=\dfrac{1}{n},n\in N^*$，$\therefore(n-1)a_{n+1}-(n+1)a_n=-(n+1),n\in N^*$．

$\because a_2=6$，分别令 $n=1,2,3,4$，可得

$$\begin{array}{l} a_1=1=1\times(2\times1-1),\quad a_3=15=3\times(2\times3-1),\\ a_4=28=4\times(2\times4-1),\quad a_5=45=5\times(2\times5-1). \end{array}$$

（2）猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n(2n-1),n\in N^*$. 用数学归纳法证明如下：

证明 (i)当 $n=1$ 时，由(1)知结论成立；当 $n=2$ 时，$a_n=2\times(2\times2-1)=6=a_2$，结论成立.

(ii)假设 $n=k(k\geq2,k\in N^*)$ 时，结论成立，即 $a_n=k(2k-1)$.

当 $n=k+1$ 时，$(k-1)a_{k+1}-(k+1)a_k=-(k+1)\Rightarrow(k-1)a_{k+1}=(k+1)k(2k-1)-(k+1)$

$$\Rightarrow(k-1)a_{k+1}=(k+1)(2k^2-k-1)\Rightarrow(k-1)a_{k+1}=(k+1)(k-1)(2k+1).$$

所以，$a_{k+1}=(k+1)(2k+1)=(k+1)(2(k+1)-1)$，即 $n=k+1$ 时，结论也成立.

根据(i)和(ii)可以断定，结论 $a_n=n(2n-1)$ 对一切正整数 n 都成立.

（3）由(2)知，$b_n=\dfrac{n(2n-1)}{n\cdot2^n}=\dfrac{2n-1}{2^n}$，$n\in N^*$.　于是，

$$\left.\begin{array}{l} S_n=\dfrac{2\cdot1-1}{2}+\dfrac{2\cdot2-1}{2^2}+\cdots+\dfrac{2(n-1)-1}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}\\ \dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{2\cdot1-1}{2^2}+\dfrac{2\cdot2-1}{2^3}+\cdots+\dfrac{2(n-1)-1}{2^n}+\dfrac{2n-1}{2^{n+1}} \end{array}\right\}\underset{相减}{\Longrightarrow}$$

$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$，所以，$S_n=3-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}$.

四、附加题（本大题共 2 题，每题 10 分，满分 20 分）

1．歌德巴赫（Goldbach．C．德．1690—1764）曾研究过“所有形如 $\dfrac{1}{(n+1)^{m+1}}$（m，n 为正整数）的分数之和”问题．为了便于表述，引入记号：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m+1}}=(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots)+(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots)+\cdots$$
$$+(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+1)^4}+\cdots)+\cdots$$

写出你对此问题的研究结论：$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m+1}}=1}$（用数学符号：即引入的记号表示）。

2.已知数列$\left\{a_n\right\}$，对于任意的正整数n，$a_n=\begin{cases}1, & (1\le n\le 2009)\\ -2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2009}, & (n\ge 2010)\end{cases}$，设$S_n$表示数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和。下列关于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的结论，正确的是（　　）B

A．$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-1$

B．$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2008$

C．$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}2009 & (1\le n\le 2009)\\ -1 & (n\ge 2010)\end{cases}\left(n\in N^*\right)$

D．$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2009$