2017 秋季班高二数学精练题集参考答案

第 1 讲　参考答案

【典例精析】

例 1. 若 O 是 ΔABC 内一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求证：$O$ 是 ΔABC 的重心。

证明：以 $\overrightarrow{OB}$ 、$\overrightarrow{OC}$ 为邻边作平行四边形 $OBDC$，连结 OD 交 BC 于 E，则 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$，又 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，所以 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$. 所以 $-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，即 A 、O 、D 共线，且 O 为 AD 的中点，又 E 为 OD 中点，所以 O 是中线 AE 的三等分点，且 $OA=\frac{2}{3}AE$，所以 O 是 ΔABC 的重心。

例 2. 向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 有公共起点 O，且满足 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}(\lambda,\mu\in R)$，证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三个向量的终点 A,B,C 在一条直线上的充要条件是 $\lambda+\mu=1$。

证明：必要性：如果 A 、B 、C 在一条直线上，则存在一个实数 m，使得 $\overline{AC}=m\overline{AB}$，即 $\vec{c}-\vec{a}=m(\vec{b}-\vec{a})$，所以 $\vec{c}=(1-m)\vec{a}+m\vec{b}$，因为 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，所以 $\lambda=1-m,\mu=m$，得 $\lambda+\mu=1$；

充分性：如果 $\lambda+\mu=1$，则 $\lambda=1-\mu$，所以 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}==(1-\mu)\vec{a}+\mu\vec{b}$，所以 $\vec{c}-\vec{a}=\mu(\vec{b}-\vec{a})$，即 $\overline{AC}=\mu\overline{AB}$，所以 A 、B 、C 三点共线。

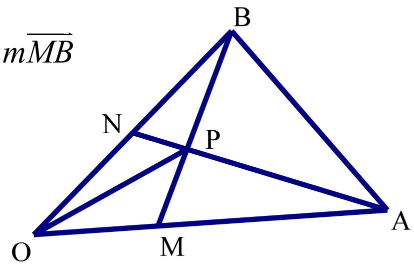
例 3. 设 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 是任意非零平面向量，且 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 不平行，如果 x_1 、x_2 是方程 $\vec{a}x^2+\vec{b}x+\vec{c}=\vec{0}(x\in R)$ 的两个实数根，证明：$x_1=x_2$.

证明：因为 x_1 、x_2 是方程 $\vec{a}x^2+\vec{b}x+\vec{c}=\vec{0}(x\in R)$ 的两个实数根，所以 $\vec{a}{x_1}^2+\vec{b}x_1+\vec{c}=\vec{0}$，$\vec{a}{x_2}^2+\vec{b}x_2+\vec{c}=\vec{0}$，即 $\vec{a}({x_1}^2-{x_2}^2)+\vec{b}(x_1-x_2)=\vec{0}$，得 $(x_1-x_2)[\vec{a}(x_1+x_2)+\vec{b}]=\vec{0}$，由题意知 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 不平行，所以 $\vec{a}(x_1+x_2)+\vec{b}\neq\vec{0}$，所以 $x_1=x_2$。

例 4．直线经过ΔABO的重心G，分别交边OA、OB于点P、Q，若$\overline{OP}=x\overline{OA}$，$\overline{OQ}=y\overline{OB}$ $(x,y\neq 0)$，求证：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$.

证明：设AB中点为M，则$\overline{OG}=\frac{2}{3}\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB})$，又$P$、$Q$、$G$三点共线，所以$\overline{OG}=t\overline{OP}+(1-t)\overline{OQ}=xt\overline{OA}+(1-t)y\overline{OB}$，因为$\overline{OA}$、$\overline{OB}$不共线，所以$\overline{OA}$、$\overline{OB}$可以作为该平面上向量的基。所以$\begin{cases} xt=\frac{1}{3} \\ (1-t)y=\frac{1}{3} \end{cases}$，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$。

例 5. 已知ΔOAB，其中$\overline{OA}=\vec{a}$，$\overline{OB}=\vec{b}$，M,N分别是边$\overline{OA}$、$\overline{OB}$上的点，且$\overline{OM}=\frac{1}{3}\vec{a},\overline{ON}=\frac{1}{2}\vec{b}$，设$\overline{AN}$与$\overline{BM}$相交于$P$，用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$表示$\overline{OP}$.



证明：设$\overline{MP}=m\overline{MB},\overline{NP}=n\overline{NA}$，则$\overline{OP}=\overline{OM}+m\overline{MB}$

$=\frac{1}{3}\vec{a}+m(\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a})=\frac{1}{3}(1-m)\vec{a}+m\vec{b}$，

$\overline{OP}=\overline{OB}+m\overline{NA}=\frac{1}{2}\vec{b}+n(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})=\frac{1}{2}(1-n)\vec{b}+n\vec{a}$

由于$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线，所以$\begin{cases} \frac{1}{3}(1-m)=n \\ \frac{1}{2}(1-n)=m \end{cases}$ 解得$\begin{cases} n=\frac{1}{5} \\ m=\frac{2}{5} \end{cases}$，所以$\overline{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

例 6. 已知点P分向量$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比为-5，$\overrightarrow{OP_1}=2\vec{a}-\vec{b},\overrightarrow{OP_2}=\vec{a}+\vec{b}$，其中$\vec{a}$、$\vec{b}$为不平行的向量，若将$\overrightarrow{OP}$写成$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$的形式，求实数$\lambda$和$\mu$的值。

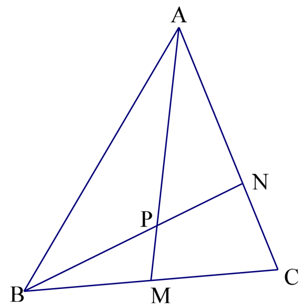
解： 因为点P分向量$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比为-5，所以$\overrightarrow{P_1P}=-5\overrightarrow{PP_2}$，又$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$

$=-\vec{a}+2\vec{b}$，故$\overrightarrow{P_1P}=-5(\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{P_1P_2})=5\overrightarrow{P_1P}-5\overrightarrow{P_1P_2}$，从而$\overrightarrow{P_1P}=\frac{5}{4}\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{5}{4}(-\vec{a}+2\vec{b})$

$=-\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b}$.在$\Delta OP_1P$中，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=(2\vec{a}-\vec{b})+(-\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b})=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

所以$\lambda=\dfrac{3}{4}$，$\mu=\dfrac{3}{2}$.

例 7.如图，在ΔABC中，已知点M是BC的中点，点N在边AC上，且$AN=2NC$，AM与BN相交于点P，求$AP:PM$的值.



解：设$\overline{BM}=\overline{e_1},\overline{CN}=\overline{e_2}$，则$\overline{AM}=\overline{AC}+\overline{CM}=-3\overline{e_2}-\overline{e_1}$，

$\overline{BN}=\overline{BC}+\overline{CN}=2\overline{e_1}+\overline{e_2}$，因为点$A$、$P$、$M$共线，所以

$\overline{AP}=\lambda\overline{AM}=-3\lambda\overline{e_2}-\lambda\overline{e_1}$，同理，$\overline{BP}=\mu\overline{BN}=2\mu\overline{e_1}+\mu\overline{e_2}$

所以$\overline{BA}=\overline{BP}+\overline{PA}=2\mu\overline{e_1}+\mu\overline{e_2}+3\lambda\overline{e_2}+\lambda\overline{e_1}=(2\mu+\lambda)\overline{e_1}+(\mu+3\lambda)\overline{e_2}$

又$\overline{BA}=\overline{BC}+\overline{CA}=2\overline{e_1}+3\overline{e_2}$

故$\begin{cases}2\mu+\lambda=2\\ \mu+3\lambda=3\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\lambda=\dfrac{4}{5}\\ \mu=\dfrac{3}{5}\end{cases}$ 所以$\overline{AP}=\dfrac{4}{5}\overline{AM}$即$AP:PM=4:1$.

例 8.平面内给定三个向量$\vec{a}=(3,2),\vec{b}=(-1,2),\vec{c}=(4,1)$

（1） 求$3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$；

（2） 求满足$\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$的实数$m$、$n$；

（3） 设$\vec{d}=(x,y)$满足$(\vec{d}-\vec{c})//(\vec{a}+\vec{b})$，且$|\vec{d}-\vec{c}|=1$，求$\vec{d}$。

解：（1）$(0,6)$

（2）$\begin{cases}m=\dfrac{5}{9}\\ n=\dfrac{8}{9}\end{cases}$

（3）$\vec{d}=(\dfrac{20+\sqrt{5}}{5},\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5})$或$\vec{d}=(\dfrac{20-\sqrt{5}}{5},\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5})$

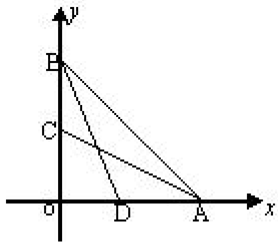
第 3 讲　参考答案

【典例精析】

一、几何应用

例 1．求等腰直角三角形中两直角边上的中线所成的钝角的度数。

解：如图，分别以等腰直角三角形的两直角边为x轴、y轴建立直角坐标系，设$A(2a,0),B(0,2a)$，则$D(a,0),C(0,a)$，



从而可求：$\overrightarrow{AC}=(-2a,a),\overrightarrow{BD}=(a,-2a)$,

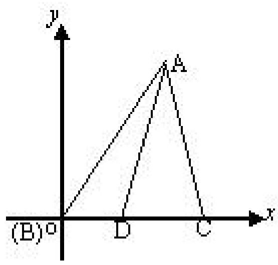
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{(-2a,a)\cdot(a,-2a)}{\sqrt{5}a\cdot\sqrt{5}a}=\frac{-4a^2}{5a^2}=-\frac{4}{5}.$$

$$\therefore\theta=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right).$$

例 2．已知ΔABC，AD 为中线，求证$AD^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right)-\left(\frac{BC}{2}\right)^2$

证明：以 B 为坐标原点，以 BC 所在的直线为x轴建立如图 2 直角坐标系，

设$A(a,b),C(c,0)$，$D\left(\frac{c}{2},0\right)$，



则$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left(\frac{c}{2}-a\right)^2+(0-b)^2=\frac{c^2}{4}-ac+a^2+b^2$，

$$\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)-\left(\frac{\left|\overrightarrow{BC}\right|}{2}\right)^2.$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2+b^2+(c-a)^2+b^2-\frac{c^2}{4}\right]=a^2+b^2-ac+\frac{c^2}{4},$$

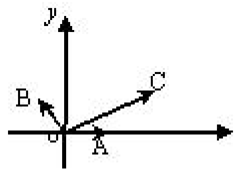
从而$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)-\left(\frac{\left|\overrightarrow{BC}\right|}{2}\right)^2$，$AD^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right)-\left(\frac{BC}{2}\right)^2$.

例 3．如图，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1,\overrightarrow{OA}与\overrightarrow{OB}的夹角为120^0,\overrightarrow{OC}与\overrightarrow{OA}的夹角为30^0,\left|\overrightarrow{OC}\right|=5,$

用$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OC}$.

解：以 O 为坐标原点，以 OA 所在的直线为x轴，建立如图所示的直角坐标系，则$A(1,0)$，

由$\angle \mathrm{COA}=30^0$，所以$\mathrm{C}\left(5\cos 30^0,5\sin 30^0\right)$,即$\mathrm{C}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right)$,



同理可求$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$,即$\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right)=\lambda_1(1,0)+\lambda_2\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\begin{cases}\frac{5\sqrt{3}}{2}=\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2\\ \frac{5}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2\end{cases},\begin{cases}\lambda_1=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ \lambda_2=\frac{5\sqrt{3}}{3}\end{cases}.\therefore \overrightarrow{OC}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{5\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB}.$$

二、代数应用

例 4．在直角坐标平面中，已知点$P_1(1,2),P_2(2,2^2),P_3(3,2^3),\cdots P_n(n,2^n)$，其中 n 是正整数，对平面上任一点 A_0，记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点，A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点，……，A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.

（1）求向量$\overrightarrow{A_0A_2}$的坐标；　　（2）对任意偶数 n，用 n 表示向量$\overrightarrow{A_0A_n}$的坐标.

解：（1）设$A_n(x_n,y_n)$，$\therefore A_n$与A_{n-1}关于点$P_n(n,2^n)$对称

$$\therefore\begin{cases}x_n+x_{n-1}=2n\\ y_n+y_{n-1}=2^{n+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2-x_0\\ y_1=4-y_0\end{cases},\begin{cases}x_2=4-x_1=2+x_0\\ y_2=8-y_1=4+y_0\end{cases}$$

故$\overrightarrow{A_0A_2}=(x_2-x_0,y_2-y_0)=(2,4)$

（2）$\because\begin{cases}x_n+x_{n-1}=2n\\ x_{n+1}+x_n=2(n+1)\end{cases}$　$\therefore x_{n+1}=2(n+1)-x_n=2+x_{n-1}\Rightarrow x_{n+1}-x_{n-1}=2$

同理可得：$y_{n+1}-y_{n-1}=2^{n+1}$　$\therefore\overrightarrow{A_{n-1}A_{n+1}}=(x_{n+1}-x_{n-1},y_{n+1}-y_{n-1})=(2,2^{n+1})$

故$\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$

$$=(2,2^2)+(2,2^4)+\cdots+(2,2^n)=\left(2\times\frac{n}{2},\frac{2^2(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4}\right)=\left(n,\frac{2^{n+2}-4}{3}\right)$$

例 5．设x轴、y轴正方向上的单位向量分别是$\vec{i}$、$\vec{j}$，坐标平面上点A_n、$B_n\left(n\in N^*\right)$分别满足下列两个条件：①$\overrightarrow{OA_1}=\vec{j}$且$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\vec{i}+\vec{j}$；②$\overrightarrow{OB_1}=3\vec{i}$且$\overrightarrow{B_nB_{n+1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\times 3\vec{i}$.

（1）求 $\overrightarrow{OA_n}$ 及 $\overrightarrow{OB_n}$ 的坐标；

（2）若四边形 $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$ 的面积是 a_n，求 $a_n\left(n\in N^*\right)$ 的表达式；

（3）对于（Ⅱ）中的 a_n，是否存在最小的自然数 M，对一切 $\left(n\in N^*\right)$ 都有 $a_n<M$ 成立？若存在，求 M；若不存在，说明理由.

解：（1）$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{j}+(n-1)(\vec{i}+\vec{j})=(n-1)\vec{i}+n\vec{j}=(n-1,n)$

$\overrightarrow{OB_n}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\cdots+\overrightarrow{B_{n-1}B_n}=3\vec{i}+(\frac{2}{3})^1\times 3\vec{i}+(\frac{2}{3})^2\times 3\vec{i}+\cdots+(\frac{2}{3})^{n-1}\times 3\vec{i}$

$=\dfrac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}\times 3\vec{i}=\left(9-9\times(\frac{2}{3})^n,0\right)$. ……………………………………5 分

（2）$a_n=S_{\triangle PA_{n+1}B_{n+1}}-S_{\triangle PA_nB_n}=\frac{1}{2}[10-9\times(\frac{2}{3})^{n+1}]\times(n+1)-\frac{1}{2}[10-9\times(\frac{2}{3})^n]\times n$

$=5+(n-2)\times(\frac{2}{3})^{n-1}$，……………………………………………………10 分

（3）$a_n-a_{n+1}=[5+3(n-2)\times(\frac{2}{3})^{n-1}]-[5+3(n-1)\times(\frac{2}{3})^n]$

$=3\times(\frac{2}{3})^{n-1}[(n-2)-(n-1)\times(\frac{2}{3})]=(n-4)\times(\frac{2}{3})^{n-1}$

所以 $a_1-a_2<0,a_2-a_3<0,a_3-a_4<0,a_4-a_5=0,a_5-a_6>0,a_6-a_7>0,$ 等

即在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=a_5=5+\frac{8}{9}$ 是数列的最大项，所以存在最小的自然数 $M=6$，对一切 $\left(n\in N^*\right)$ 都有 $a_n<M$ 成立.

第 4 讲 参考答案

【典例精析】

例 1、已知直线l过点$A(1,2)$，它的一个方向向量为$\vec{d}=(2,3)$，直线l'过点$B(3,3)$，试分别求满足下列条件的直线l'的方程（不要求化成一般式）

（1）直线l'与直线l垂直；

（2）直线l'与直线l平行；

（3）直线l'的倾斜角比直线l的倾斜角大$\dfrac{\pi}{4}$；

（4）点$A(1,2)$到直线l'的距离最大.

解：（1）因为$l\perp l'$，所以$\vec{d}=(2,3)$为l'的一个法向量，

所以直线l'的点法向式方程为$2(x-3)+3(\mathrm{y}-3)=0$

（2）因为$l//l'$，所以$\vec{d}=(2,3)$为l'的一个方向向量

所以直线l'的点方向式方程为$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{3}$

（3）因为直线l的斜率$k=\dfrac{3}{2}$，故其倾斜角α满足$\tan\alpha=\dfrac{3}{2}$，因为直线l'的斜率

$$k'=\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}=-5$$

所以直线l'的点斜式方程为$y-3=-5(x-3)$.

（4）易知当$AB\perp l'$时，点A到l'的距离最大，故$\overrightarrow{AB}=(2,1)$为直线$l'$的法向量，所以

l'的点法向式方程为$2(x-3)+(\mathrm{y}-3)=0$.

例 2、已知直角坐标平面内三点$A(m,1),B(2m,4),\mathrm{C}(4,10)$共线，求实数$m$的值.

解：由A、B、C三点共线，可知由A、C两点确定的直线的斜率等于由B、C两点确定的直线的斜率，即$\dfrac{10-1}{4-m}=\dfrac{10-4}{4-2m}$

解得$m=1$.

例 3、（1）求直线$x-y\cdot\cos\alpha+1=0(\alpha\in R)$的倾斜角$\theta$的取值范围；

（2）求直线$x+\cos\theta\cdot y+1=0,\theta\in[0,\pi]$的斜率和倾斜角.

解：（1）当$\cos\alpha=0$时，直线为$x+1=0$，其倾斜角$\theta=\frac{\pi}{2}$

当$\cos\alpha\neq 0$时，直线为$y=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot x+\frac{1}{\cos\alpha}$，其斜率$k=\frac{1}{\cos\alpha}\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

即$\tan\theta\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，$\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi]$

所以倾斜角θ的取值范围是$[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

（2）当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，斜率k不存在，倾斜角$\alpha=\frac{\pi}{2}$，当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，$k=-\frac{1}{\cos\theta}<0$，所以倾斜角$\alpha=\pi-\arctan\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$；当$\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$时，$k=-\frac{1}{\cos\theta}>0$，所以倾斜角

$\alpha=-\arctan\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$.

例 4、已知直线经过点$P(1,2)$，且分别与x,y轴的正半轴交于A、B两点，求：

（1）$|OA|+|OB|$的最小值；（2）$|AP|\cdot|BP|$的最小值.

解：（1）设$l:y=k(x-1)+2(k<0)$，可求得$A(1-\frac{2}{k},0)$，$B(0,2-k)$

$|OA|+|OB|=1-\frac{2}{k}+2-k=3+[\frac{2}{-k}+(-k)]\ge 3+2\sqrt{2}$，当且仅当$k=-\sqrt{2}$时，$|OA|+|OB|$的最小值为$3+2\sqrt{2}$

（2）设$\angle BAO=\theta,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$|PA|=\frac{2}{\sin\theta},|PB|=\frac{1}{\cos\theta}$

$|AP|\cdot|BP|=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{4}{\sin 2\theta}\ge 4$

当且仅当$\sin 2\theta=1$，即$\theta=\frac{\pi}{4}$时，$|AP|\cdot|BP|$的最小值为 4.

例 5、已知直线的斜率为$\frac{1}{2}$，且与坐标轴围成的三角形面积为 5，求直线的方程.

解：令直线方程为：$y=\frac{1}{2}x+b$，因为$\frac{1}{2}|b||-2b|=5$，所以$b=\sqrt{5}$或$b=-\sqrt{5}$

因此所求直线方程为：$y=\frac{1}{2}x+\sqrt{5}$或$y=\frac{1}{2}x-\sqrt{5}$

例 6、若矩形$ABCD$的边AB所在直线方程为$3x+4y-8=0$，顶点B的坐标为$(0,2)$，点D的坐标为$(5,\frac{9}{2})$，求：

（1）边 CD、BC 所在的直线方程；
（2）对角线 AC 所在的直线方程.

解：（1）设直线 CD 方程为 $3x+4y+c=0$，点 $(5,\dfrac{9}{2})$ 代入得 $c=-33$，即 $3x+4y-33=0$.

设直线 BC 方程为 $4x-3y+c=0$，点 $(0,2)$ 代入得 $c=6$，即 $4x-3y+6=0$.

（2）由 $\begin{cases}4x-3y+6=0\\3x+4y-33=0\end{cases}$ 得点 $C(3,6)$，又 AC 中点坐标为 $(\dfrac{5}{2},\dfrac{13}{4})$，所以直线 AC 方程为 $11x-2y-21=0$.

例 7、已知点 P 是直线 $3x-y=0$ 上位于第一象限的点，$M(3,2)$ 为一定点，直线 PM 交 x 轴于点 Q，求 ΔPOQ 面积的最小值及此时的直线 PQ 的方程.

答：分直线 PQ 的斜率存在与不存在讨论，得直线 PQ 方程为 $6x+5y-28=0$，ΔPOQ 面积最小值为 $\dfrac{28}{3}$.

第 5 讲 参考答案

【典例精析】

例 1、求直线 $4x+y-1=0$ 关于点 $M(2,3)$ 对称的直线方程.

答：$4x+y-21=0$

例 2、已知直线 l 经过坐标原点，当三点 $A(1,2)$，$B(3,1)$，$C(2,3)$ 到直线 l 的距离的平分和最大时，求直线 l 的方程.

解：当直线 l 为 y 轴时，三点到直线 l 的距离的平方和为 14，当直线 l 不为 y 轴时，设 l 的方程为 $y=kx$，则三点到直线 l 的距离的平方和 $d=\dfrac{(k-2)^2+(3k-1)^2+(2k-3)^2}{1+k^2}$ 化成以 k 为未知数的方程：$(d-14)k^2+22k+(d-14)=0$，因为 $k\in R$，所以 $\Delta_k\ge 0$，

即 $22^2-4(d-14)^2\ge 0$，解得 $3\le d\le 25$，当平方和 d 取最大 25 时，解得 $k=-1$，所以要求的直线为 $y=-x$.

例 3、若平行四边形 $OABC$ 的三个顶点坐标为 $O(0,0)$、$A(3,1)$、$C(-1,3)$

（1）求 B 点的坐标；

（2）若与 x 轴的夹角为 30° 的一条直线把平行四边形 $OABC$ 的面积分为相等的两部分，求直线 l 的方程.

答：（1）$B(2,4)$

（2）$\sqrt{3}x-3y+6-\sqrt{3}=0$

例 4、求过点 $(1,-3)$ 且与直线 $2x-13y+8=0$ 平行的直线方程.

答：$2x-13y-41=0$.

例 5、求过点 $(11,-5)$ 且与直线 $4x-3y-17=0$ 垂直的直线方程.

答：$3x+4y-13=0$

例 6、求两条直线 $x+\sqrt{3}y-5=0$ 与 $3x+1=0$ 之间的夹角.

答：$\dfrac{\pi}{3}$

例 7、在ΔABC中，$A(-1,5)$，$B(0,-1)$，$\angle C$平分线所在直线方程为$x+y-2=0$，求AC所在直线方程.

解：由于点B关于直线$x+y-2=0$的对称点$D(x,y)$在AC上，求得$D(3,2)$，再利用A点可得直线AC方程为$3x+4y-17=0$

例 8、两条平行线分别过点$A(1,0)$，$\mathrm{B}(0,5)$且距离为 5，求两条直线的方程.

答：有两组解：$y=0$和$y=5$；

$5x-12y-5=0$和$5x-12y+60=0$

例 9、已知直线$3x-4y+5=0$与l关于直线$x+y=0$对称，求l的方程.

答：$4x-3y+5=0$

例 10、当a为何值时，三条直线$l_1: x-y+1=0$，$l_2: ax+y-2=0$，$l_3: x+2ay+2a=0$能构成三角形？

解：若$l_1 // l_2$，则$a=-1$；若$l_1 // l_3$，则$a=-\dfrac{1}{2}$；若$l_2 // l_3$，则$a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时三种情形都不能构成三角形.

易知使$l_1 // l_2 // l_3$的a不存在.

若l_1、l_2、l_3三线共点，则也不能构成三角形，此时，由$\begin{cases} x-y+1=0 \\ ax+y-2=0 \end{cases}$解得$l_1$与$l_2$的交点坐标为$x=\dfrac{1}{1+a}$，$y=\dfrac{2+a}{1+a}$

代入l_3的方程解得$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$

综上所述，当$a\neq-1$，且$a\neq-\dfrac{1}{2}$，且$a\neq\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且$a\neq\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$时，$l_1$、$l_2$、$l_3$能构成三角形.

第 6 讲 参考答案

【典例精析】

例 1、已知直线 $l_1: y = kx + 2k + 1$ 与 $l_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ 的交点在第一象限，求实数 k 的取值范围.

解：由 $\begin{cases} y = kx + 2k + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ 解得两直线的交点坐标为 $\begin{cases} x = \frac{2-4k}{2k+1} \\ y = \frac{6k+1}{2k+1} \end{cases}$

由题设得 $\begin{cases} \frac{2-4k}{2k+1} > 0 \\ \frac{6k+1}{2k+1} > 0 \end{cases}$ 解得 $k \in (-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$

例 2、（1）求点 (a, a^2) 到直线 $l: 2x - y - 2 = 0$ 距离的最小值；

（2）若点 (a, a^2) 与原点在直线 $l: x - y + 2 = 0$ 的同侧，求 a 的取值范围.

解：（1）点 (a, a^2) 到直线 l 的距离为 $d = \frac{\left|2a - a^2 - 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|(a-1)^2 + 1\right|}{\sqrt{5}}$ 当 $a = 1$ 时，d 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$；

（2）由点 (a, a^2) 与原点在直线 l 的两侧，得 $\delta_1 \cdot \delta_2 > 0$，即 $\frac{a - a^2 + 2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} > 0$

解得 $a \in (-1, 2)$

例 3、求与点 $P(4,1)$ 关于直线 $l: 3x - 2y + 3 = 0$ 对称的点 Q 的坐标.

解：l 为线段 PQ 的垂直平分线，由此得直线 l 的法向量 $\vec{n} = (3, -2)$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 平行

设 $Q(x, y)$，则有 $\overrightarrow{PQ} = (x-4, y-1)$，且 $\overrightarrow{PQ} // \vec{n}$，即 $\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-2}$

又 PQ 的中点 $(\frac{x+4}{2}, \frac{y+1}{2})$ 在直线 l 上，即 $3 \cdot \frac{x+4}{2} - 2 \cdot \frac{y+1}{2} + 3 = 0$

解得 $Q(-2, 5)$

例 4、求与已知直线 $l_1: 2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $P(1, -1)$ 对称的直线 l_2 的方程.

解：由题意知$l_1//l_2$，l_2的方向向量为$\vec{d}=(3,-2)$

又l_1上的点$A(0,2)$关于点$P(1,-1)$对称的点为$B(2,-4)$，点B必在l_2上，故直线l_2的点方向式方程为$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}$，即$2x+3y+8=0$.

例 5、已知直线$l_1:y=\dfrac{x}{2}-1$与直线l_2关于直线$l:y=2x-4$对称，求直线l_2的方程.

解：由$\begin{cases}y=\dfrac{x}{2}-1\\y=2x-4\end{cases}$解得$l_1$与$l$的交点$P(2,0)$，由题设知$l$、$l_1$的方向向量分别为$\vec{d}=(1,2),\vec{d_1}=(2,1)$，设$l_2$的方程为$y=k(x-2)$，则$\vec{d_2}=(1,k)$

若设l_1与l、l_2与l所成的角分别为θ_1、θ_2，则$\theta_1=\theta_2$，得$\cos\theta_1=\cos\theta_2$，即

$\dfrac{|\vec{d}\cdot\vec{d_1}|}{|\vec{d}||\vec{d_1}|}=\dfrac{|\vec{d}\cdot\vec{d_2}|}{|\vec{d}||\vec{d_2}|}$，即$\dfrac{4}{5}=\dfrac{|1+2k|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+k^2}}$，解得$k=-\dfrac{11}{2}$或$\dfrac{1}{2}$，其中$\dfrac{1}{2}$即为$l_1$的斜率

所以直线l_2的方程.为$11x+2y-22=0$.

例 6、已知过定点$P(2,4)$的两条互相垂直的直线l_1与l_2，l_1与y轴正半轴交于点A，l_2与x轴正半轴交于点B，试用解析式将这两条直线及两坐标轴正半轴围成的四边形的面积S表示成直线l_1的斜率k的函数.

解：设$l_1:y=k(x-2)+4$，$l_2:y=-\dfrac{1}{k}(x-2)+4$，则$A(0,4-2k),B(4k+2,0)$

由题设$\begin{cases}4-2k>0\\4k+2>0\end{cases}$解得$-\dfrac{1}{2}<k<2$．四边形$OAPB$的面积为

$$S=S_{\Delta OAB}+S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|+\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&4&1\\0&4-2k&1\\4k+2&0&1\end{vmatrix}\right|$$

$=-4k^2+6k+4+4k^2+4=6k+8$

$\therefore S=6k+8(-\dfrac{1}{2}<k<2)$

例 7、在直角坐标平面中，已知$A(1,2)$，$B(a+2,a+2)$，$C(a,2a)$三点，试判断是否存在分别满足下列条件的实数a.若存在，则求出a；若不存在，则说明其理由.

（1）A,B,C三点共线；

（2） A,B,C 三点在直线 $l:x-2y-2=0$ 的同侧，且三角形 ABC 的面积为 5；

（3） A,B,C 三点在直线 $l:x-2y-2=0$ 的同侧，且三角形 ABC 的面积最大.

解：（1）由题意得，ΔABC 的面积为 0，即 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a+2 & a+2 & 1 \\ a & 2a & 1 \end{vmatrix}=0$

化简得 $(a-1)(a+2)=0$ 解得 $a=1$ 或 $a=-2$，又 $a=1$ 时 A 与 C 重合

$\therefore a=-2$ 使 A,B,C 三点共线

（2）若 A,B,C 三点在直线 $l:x-2y-2=0$ 的同侧，则由 $\delta_1=\dfrac{1-2\cdot 2-2}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}<0$，可

知 $\delta_2=\dfrac{a+2-2(a+2)-2}{\sqrt{5}}<0$ 且 $\delta_3=\dfrac{a-2\cdot 2a-2}{\sqrt{5}}<0$ 解得 $a>-\dfrac{2}{3}$

又 $S_{\Delta ABC}=5$，即 $\left|\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a+2 & a+2 & 1 \\ a & 2a & 1 \end{vmatrix}\right|=5$ 解得 $a=-4$ 或 $a=3$ 所以存在 $a=3$ 满足题设

（3）由（2）可知当 A,B,C 三点在直线 $l:x-2y-2=0$ 的同侧时，$a>-\dfrac{2}{3}$，

又 $S=\left|\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a+2 & a+2 & 1 \\ a & 2a & 1 \end{vmatrix}\right|=\left|\dfrac{1}{2}[(a+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{9}{4}]\right|$，所以当 $a>-\dfrac{2}{3}$ 时不存在 a 使 S 最大.

第 7 讲参考答案

1. 1 或-2.5　　2.点 O,点 B,　　3. (1),(2),(3),(4)　　4.f(2x-2,2y+1)=0

5 . (1)y=2 $(-1 \le x \le 5)$　(2)y=2 $(x \ge 5)$　　6. (4)

7. $4\sqrt{2}$　　8. $\left[-6,-\frac{1}{2}\right]$

9.(1)设$P(x,y)$,在直角三角形AOB中,$|OP|=\frac{1}{2}|AB|=3$ 得轨迹方程为 $x^2+y^2=9$

(2)设$P(x,y)$,由已知得$\frac{|x+y-1|^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=|x|$,且$y>0$,化简得到轨迹方程是

$x^2+y^2+2xy-4x-2y+1=0\quad(x\ge 0,y>0)$和 $x^2+y^2+2xy-2y+1=0\quad(x<0,y>0)$

10.由已知条件可以解出$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+(y-1)^2} \\ v=\dfrac{-x^2-y(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \end{cases}$

（1）当点$P(x,y)$在不含点（0,1）的y轴上运动时，x=0, $y\ne 1$, 此时u=0, v=$-\frac{y}{y-1}\ne -1$,

所以点Q的轨迹是直线$u=0$(除去点（0,-1）

（2）当点P(x, y)在x轴上运动时，$y=0$, 此时

$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+1} \\ v=\dfrac{-x^2}{x^2+1} \end{cases}$　消去 x，得 $u^2+v^2+v=0$，即$\sqrt{u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}$，这是以点$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$为圆心，以$\frac{1}{2}$为半径的圆（除去点（0，－1））

第 8 讲 参考答案

1. $\odot C:(x-2)^2+(y+2)^2=25$

2. $(x-2)^2+(y+1)^2=4,(x-42)^2+(y+21)^2=1924$

3. $x^2+y^2=25$

4. $(x-\frac{15}{2})^2+y^2=\frac{225}{4}$

5. $2x-y+1=0$

6. $x+y-3=0$

7. $c=\frac{21}{5}$

8. $x-y-8=0$

第 9 讲 参考答案

1(1) $\dfrac{3x^2}{11}+\dfrac{y^2}{11}=1$；(2) $\dfrac{y^2}{15}+\dfrac{x^2}{10}=1$.

2(1) $\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1$；(2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

3(1) $P(\pm\dfrac{5}{4}\sqrt{7},\pm\dfrac{9}{4})$；(2) $b=2\sqrt{3}$；(3) $\min=8$.

4(1) $k\in(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{6}}{3},+\infty)$；(2) $x-y-5=0$.

第 10 讲 参考答案

1. $|MN|=2$

2. $b\in(-\sqrt{390},\sqrt{390}), L=\dfrac{5\sqrt{2}}{13}\sqrt{390-b^2}$

3. $S_{\max}=1$

4. $\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{y^2}{2}=1, \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}y^2=1$

5. $l:4x+9y-13=0$

6. $y=-2x$ (已知椭圆内部)

7. $9x^2+25y^2-72x-25y=0$ (已知椭圆内部)

8. $\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{2}{3}y^2=1$

第 11 讲 参考答案

I 双曲线的标准方程

1. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1,\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$

2. $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{48}=1$

3. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1,\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

4. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1,\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{81}=1$

6. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$

II 双曲线与直线

1. $3x+4y-25=0$

2. $k=\frac{1}{6}$

3. $y^2-y=4x^2$

4. $k=\pm 1$

5. $2x-y\pm 10=0$

6. (1) $k\in(-\sqrt{2},-1)$；(2) $5x+4y+4=0$

第 12 讲 参考答案

1. $x^2=-16y$

2. $x^2=6y, x^2=-6y$

3. $y^2=20x, y^2=-20x$

4. $y^2=4x$

5. $|MF|=13$

6. $C: y^2=-8x, S: x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

7. $2x-y-3=0$

8. $S_{\min}=\dfrac{1}{4}$

9. $|AB|=4p$, $\theta=\pi-\arccos\dfrac{3}{\sqrt{41}}$

10. $p\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

11. $y=4, x-y+2=0$

12. $b<-\dfrac{3}{2}$

14. $|AB|=\dfrac{16}{3}$

15. $|AB|=5p$

16. $y^2=4x$