2018寒假基础教案-高一数学

目录

编写说明

1.本册《基础教案》主要用于各位学员在寒假期间学习《三角比》时，根据不同老师的教学安排，在学完新课之后，做课后练习选用，其中大部分习题来源于中西书局《金牌一课一练》；

2.每一节的第 10、15、20 题为拓展练习，各位学员可以灵活使用；

3.因编写时间仓促，错误或不足之处在所难免，欢迎各位学员予以指正，把你发现的问题发送至电子邮箱 godsun@aliyun.com，以方便后续更正.

第 1 讲:任意角及其度量

[知识概要]

1.角的概念：角可以看作是一条射线绕其端点在平面内旋转而成的，射线的端点叫做角的顶点，旋转的初始位置称为角的始边，终止位置称为角的终边.

2.角的分类

(1)正角、负角、零角

(2)终边相同的角：与角α终边相同角β可表示为$\beta=2k\pi+\alpha,k\in\mathbb{Z}$

(3)轴线角、象限角

(4)终边对称的角.

3.角的度量

(1)角度制：周角的$\dfrac{1}{360}$叫做 1 度的角，记作1°，用度作为单位来度量角的制度，$1^\circ=60',1'=60''$；

(2)弧度制：等于半径的弧长所对的圆心角的大小称为 1 弧度的角，用弧度来度量角的制度称为弧度制，$|\alpha|=\dfrac{l}{r}$；

(3)角度与弧度互化：$180^\circ=\pi rad$；$1rad=(\dfrac{180}{\pi})^\circ\approx57.3^\circ$；$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}rad$；

(4)弧长公式：$l=|\alpha|r$；

(5)扇形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}|\alpha|r^2$.

[课后练习]

I 填空题

1.角度弧度互换：$35^\circ=$______弧度；$75^\circ=$______弧度；$\dfrac{\pi}{5}$弧度=______度；$-\dfrac{7\pi}{3}$弧度=______度.

2.写出集合在$\{\alpha\,|\,\alpha=k\pi-\dfrac{\pi}{5},k\in\mathbb{Z}\}$，终边位于$-2\pi$到$2\pi$之间的角的集合____________.

3.航海罗盘的圆周分成 32 等分，每一部分称为 1 个罗盘方位角，则 1 罗盘方位角等于________弧度.

4.半径为 2cm，圆心角为$\dfrac{2}{5}\pi$的扇形面积为____________cm^2.

5.直径是 20cm 的轮子每秒旋转 45 弧度，轮周上一点经过 3 秒所转过的弧长等于____________cm.

6.$\dfrac{145}{7}$弧度是第________象限角；-5 弧度是第________象限角.

7.经过 3 小时，分针转过的角的弧度数是____________.

8.角α的集合$A=\{\alpha\,|\,\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\}$，则集合 A 中，属于$[-4\pi,4\pi]$的一切角________.

9.已知两角的差是30°，两角的和是π弧度，则这两个角中的弧度大的一个角是____________.

10.半径为 r 的圆内有一条弦 AB，长度为$\sqrt{2}r$，则弦 AB 所对的弧长等于____________.

II 选择题

11.下列各角与120°角终边重合的是(　　)

A. $\dfrac{5\pi}{6}$；B. $-\dfrac{2\pi}{3}$；C. $-\dfrac{5\pi}{6}$；D. $-\dfrac{4\pi}{3}$.

12.已知$k\in\mathbb{Z}$，下列各对角中，终边相同的是(　　)

A. $(2k+1)\pi$与$(4k\pm1)\pi$；B. $\dfrac{k\pi}{2}$与$k\pi+\dfrac{\pi}{2}$；C. $k\pi+\dfrac{\pi}{6}$与$2k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$；D. $k\pi+\dfrac{\pi}{3}$与$\dfrac{k\pi}{3}$.

13.终边在坐标轴上的角的集合是(　　)

A. $\{\alpha\,|\,\alpha=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$；B. $\{\alpha\,|\,\alpha=\dfrac{k}{2}\pi,k\in\mathbb{Z}\}$；

C. $\{\alpha\,|\,\alpha=k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$；D. $\{\alpha\,|\,\alpha=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\}$.

14. $A=\{x\,|\,x=n\pi+(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbb{Z}\}$，$B=\{x\,|\,x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\}$，则满足的关系是(　　)

A. $A\supsetneqq B$；B. $A\subsetneqq B$；C. $A=B$；D. $A\neq B$.

15.扇形半径为 R，周长为$3R$，则扇形中心角为(　　)

A. 60°；B. 1°；C. 30°；D. 1 弧度.

III 解答题

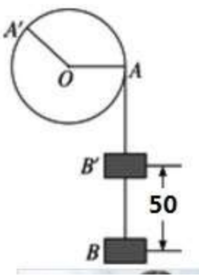
16.视力正常的人能读远处文字的视角不小于$5'$，

(1)离人 10 米处所能阅读的文字大小是多少，精确到 0.01 厘米；

(2)要看清长宽均为 5 米的大字标语，人离开标语最远的距离为几米，精确到整数.

17.正凸十边形的每一条边长都等于$2a$，分别以十个顶点为圆心，以 a 为半径画圆，如果这十个圆中的任何两个不相切的圆都没有公共点，求这十个圆在该十边形内部的面积之和.

18.一绳索在半径为 40cm 的轮子上，绳索的下端 B 处悬挂着物体 M，如果要求轮子按逆时针方向匀速旋转 4 秒，把物体 M 的位置向上提升 50cm，那么轮子每分钟匀速旋转几圈，精确到整数.



19.已知集合 $A=\{\alpha \mid k\pi<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}\}, B=\{\alpha \mid |\alpha+1|\le 2\}$，求 $A\cap B$.

20.一铁路转弯处恰成一个圆弧，半径为 0.5km，一列火车以每小时 72km 的速度行驶其上，经过 20 秒的旋转角为θ，求火车的角速度和旋转角θ.

第 2 讲:任意角的三角比

[知识概要]

1.任意角的三角比的定义

设α是任意大小的角，α终边上任意一点(不是坐标原点)$P(x,y)$，点P到原点 O 的距离$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则α的六个三角比定义为

$$\begin{aligned}&\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\tan\alpha=\frac{y}{x},\\&\cot\alpha=\frac{x}{y},\sec\alpha=\frac{r}{x},\csc\alpha=\frac{r}{y}.\end{aligned}$$

2.三角比值的符号与角所在象限的关系

由点$P(x,y)$坐标的符号知，当角α在第一象限时，所有三角比值都为正；当角α在第二象限时，正弦、余割三角比值为正，其余为负；当角α在第三象限时，正切、余切三角比值为正，其余为负；当角α在第四象限时，余弦、正割三角比值为正，其余为负；当角的终边在 x 轴上时，余切、余割无意义；当角的终边在 y 轴上时，正切、正割无意义.

[课后练习]

I 填空题

1.不用计算器，计算(1)$\sin 765^\circ=$___________；(2)$\cos(-1020^\circ)=$___________；

(3)$\tan\frac{97}{6}\pi=$______________；(4)$\cot(-\frac{39}{4}\pi)=$______________.

2.将$\sin 870^\circ,\cos(-430^\circ),\tan 1310^\circ,\sin(-2095^\circ),\cos 1900^\circ$，由小到大排列起来是_____________.

3.如果$\sin(2\pi+\alpha)<0$，则α的集合是___________.

4.若$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5},\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{5}$，则$\theta$的终边在第___________象限.

5.若$\cot(\cos\beta)\cdot\tan(\sin\beta)>0$，则$\beta$是第___________象限角.

6.下列命题：

①已知$\sin\theta=\frac{1}{2}$，则$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$；②$\cos\theta=0$，则$\sin\theta=1$；

③已知$\sin\theta\cos\theta=0$，则$\theta=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$；④已知$\alpha=\beta$，则$\tan\alpha=\tan\beta$.

其中真命题的个数有___________.

7.计算$a^2\cos\theta-b^2\sin\frac{3\pi}{2}+ab\cos\pi-ab\cos6\pi=$_____________；

8.已知α是第二象限角，且$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，则$\sin\alpha-\cos\alpha=$___________.

9.$\sin\alpha>0$，且$\cos\alpha<0$，则$\frac{\alpha}{2}$是第___________象限角.

10.已知$\sin(4\pi+\alpha)=\frac{1}{3}$，则$\sin(\alpha-8\pi)=$___________.

II 选择题

11.如果角θ的终边经过$P(0,n),n\neq0$，那么下列各式中不存在的是(　　)

A. $\sin\theta$；B. $\cos\theta$；C. $\tan\theta$；D. $\cot\theta$.

12.下列命题中正确的是(　　)

A. 存在一个角α，使$\sin\alpha=\cos\alpha=0$；B. 存在一个角α，使$\sin\alpha=\frac{a^2+b^2}{2ab},a\neq0$；

C. 存在一个角α，使$\sin\alpha+\cos\alpha<1$；D. 存在一个角α，使$\tan\alpha=0,\cos\alpha=-1$.

13.已知$\alpha\in(-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$，如果$\sin\alpha<0$，那么$\alpha$的范围是(　　)

A. $(-\frac{2\pi}{3},0)\cup(\pi,\frac{4\pi}{3})$；B. $(\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3})$；C. $(\pi,\frac{4\pi}{3})\cup(0,\frac{\pi}{2})$；D. $(\frac{\pi}{2},\pi)\cup(-\frac{\pi}{3},0)$.

14.已知角α的终边经过$(1,-2)$，则$\sin\alpha+\cos\alpha=$(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$；B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$；C. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$；D. 1.

15.$\theta\neq\frac{\pi}{4}$是$\sin\theta\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$的(　　)条件.

A. 充分非必要；B. 必要非充分；C. 充要；D. 既不充分也不必要.

III 解答题

16.集合$A=\{x\mid\sin(x-2\pi)\geq0\},B=\{x\mid |x+\frac{\pi}{3}|<2\pi\}$，求$A\cap B$；

17.求使$\dfrac{1}{\sqrt{\tan\theta}}+\dfrac{1}{\sqrt{-\sec\theta}}$有意义的$\theta$的范围.

18.已知α是锐角，比较$\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$与$\csc\alpha$的大小.

19.已知θ的终边经过点$(1,t)$，求$\sin\theta$.

20.已知$(\dfrac{1}{4})^{\sin 2\theta}<1$，且$\tan\theta\cdot\sin\theta>0$，求角$\theta$所在的象限.

第 3 讲:同角三角比

[知识概要]

1.同角三角比的基本关系式(三组八个)

(1)倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$；

(2)商式关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

(3)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

2.整体地认识同角三角比之间的关系，并运用其进行三角式的转化是值得重视的思想方法，化弦法和“1”的代换是三角恒等变形中常见的技巧，每遇$\sin\alpha\pm\cos\alpha$时，令$t=\sin\alpha\pm\cos\alpha$，则可得$\sin\alpha\cos\alpha$等式可转化为关于 t 的代数式，从而利用方程的思想使问题得以解决.

[课后练习]

I 填空题

1.化简$\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}=$____________.

2.$\dfrac{\tan\alpha+\cot\alpha}{\sec\alpha\cdot\csc\alpha}=$____________.

3.$\csc^2\theta-\tan\theta\cdot\cot\theta=$____________.

4.已知$A=\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$，用$\tan x$表示$A=$____________.

5.化简$\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{1}{1+\sec^2\theta}+\dfrac{1}{1+\csc^2\theta}=$____________.

6.化简$\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}=$____________.

7.化简$(1+\tan^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha=$____________.

8.化简$\sec^2 A-\tan^2 A-\sin^2 A=$____________.

9.使等式$2\cos^4\theta+5\cos^2\theta-7=a\sin^4\theta+b\sin^2\theta+c$成为恒等式，则$a=$____,$b=$_____,$c=$___.

10.化简$\sin(\pi-\dfrac{\pi}{6})\cdot\sin(2\pi-\dfrac{\pi}{6})\cdot\sin(3\pi-\dfrac{\pi}{6})\cdot\cdots\cdot\sin(100\pi-\dfrac{\pi}{6})=$____________.

II 选择题

11.下列公式中，$\alpha \in \mathbb{R}$ 时恒成立的个数是(　　)

①$\sin\alpha\csc\alpha = 1$；②$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$；③$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；④$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

A. 0；B. 1；C. 2；D. 3.

12.化简$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 170^\circ}}$的结果是(　　)

A. $-\cos 170^\circ$；B. $\cos 170^\circ$；C. $\pm\cos 170^\circ$；D. $-\sec 170^\circ$.

13.已知$\tan\alpha = m, \pi < \alpha < 2\pi$，则$\sin\alpha =$(　　)

A. $\pm m\sqrt{1+m^2}$；B. $\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$；C. $\pm\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$；D. $\begin{cases} -\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}, m > 0, \\ \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}, m < 0 \end{cases}$.

14.已知$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$，则角$x$的值为(　　)

A. $-\dfrac{\pi}{4}$；B. $-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$；C. $\dfrac{3\pi}{4}$；D. $\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$.

15.已知$\cos(\alpha+\beta) = -1, \tan\beta = 2$，则$\tan(\pi+\alpha) =$(　　)

A. 2；B. $\dfrac{1}{2}$；C. -2；D. $-\dfrac{1}{2}$.

III 解答题

16.证明：(1) $(1-\tan^2\alpha)^2 = (\sec^2\alpha - 2\tan\alpha)\cdot(\sec^2\alpha + 2\tan\alpha)$；

(2) $(2-\cos^2\theta)(1+2\cot^2\theta) = (2-\sin^2\theta)(2+\cot^2\theta)$；

(3) $\tan\theta + \cot\theta = 2\sin\theta\cos\theta + \sin^3\theta\cdot\sec\theta + \cos^3\theta\cdot\csc\theta$.

17.化简：$\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$.

18.已知$(\dfrac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\dfrac{\tan\beta}{\tan\theta})^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$，求证$\cos\theta=\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}$.

19.化简$(\sin A-\csc A)\cdot(\cos A-\sec A)\cdot(\tan A+\cot A)$.

20.已知$a\tan\alpha=b\tan\beta, a^2x^2=a^2-b^2$，求证：$(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)=1-x^2$.

第 4 讲:两角和差的余弦、正弦、正切(一)

[知识概要]

1.两角和差公式

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

2.辅助角公式： $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$，其中

$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},0\le\varphi<2\pi$，即角辅助角 φ 所在象限和点 (a,b) 所在象限一致.

3.诱导公式： 各组诱导公式，原角都能写成 $\dfrac{k\pi}{2}+\alpha,k\in\mathbb{Z}$ 的形式，当 k 为奇数时，原角的三角函数值等于 α 的相应余三角函数值，再将 α 看作锐角时，取原来函数在相应象限内的符号；当 k 为偶数时，原角的三角函数值等于 α 的同名三角函数值，再将 α 看作锐角时，取原来函数在相应象限的符号，概括为“奇变偶不变，符号看象限”.

[课后练习]

I 填空题

1.计算 $\cos12^\circ\cos33^\circ-\cos78^\circ\sin33^\circ=$___________.

2.若 $0<\alpha<\pi$，且 $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=\dfrac{1}{4}$，则 $\cos(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha)=$___________.

3.化简 $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=$___________.

4.化简 $\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})\cos\dfrac{3\pi}{4}-\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\sin\dfrac{\pi}{4}=$___________.

5.化简 $\cos(24^\circ-\alpha)\cos(16^\circ+\alpha)-\sin(156^\circ+\alpha)\sin(164^\circ-\alpha)-\sin50^\circ=$___________.

6. $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{3})\cos(\alpha-\dfrac{2\pi}{3})+\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})\sin(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha)=$___________.

7.已知 $\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi),\cos(\theta-\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{3}{5}$，则 $\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)=$___________.

8.计算 $\sin 18^\circ \cos 27^\circ + \cos(-18^\circ) \sin 153^\circ =$____________.

9.已知 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}, \sin\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，若 α, β 均为锐角，则 $\alpha + \beta =$____________.

10.化简 $\sin(\theta+2)\cos(\theta-1) - \cos(\theta+2)\sin(\theta-1) =$____________.

II 选择题

11.将 $-\dfrac{1}{2}\sin\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$ 化成 $A\sin(\alpha+\varphi), A>0, 0<\varphi<2\pi$ 的形式，下列各式中正确的是(　　)

A. $\sin(\alpha + \dfrac{4}{3}\pi)$；B. $\sin(\alpha + \dfrac{7}{6}\pi)$；C. $-\sin(\alpha + \dfrac{\pi}{3})$；D. $\sin(\alpha - \dfrac{2\pi}{3})$.

12.化简 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \dfrac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta]$ 结果是(　　)

A. $\sin\alpha$；B. $-\sin\alpha$；C. $\sin\beta$；D. $-\sin\beta$.

13.已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}, \sec\alpha = \dfrac{5}{3}$，则 $\sin(\alpha - \dfrac{\pi}{3}) =$(　　)

A. $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$；B. $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$；C. $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$；D. $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

14.在下列命题，错误的命题是(　　)

A. 存在角 α, β，使 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$；

B. 对任意角 α, β 都有 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin(-\alpha)\sin\beta$；

C. 对任意角 α, β 都有 $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$；

D. 存在角 α, β，使 $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

15.设 $P = \sin(\alpha + \dfrac{\pi}{5}), Q = \sin\alpha + \cos\alpha$，则(　　)

A. $P>Q$；B. $P<Q$；C. $P=Q$；D. P、Q 大小不确定.

III 解答题

16.已知 $5\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$，求 $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)}{\tan\alpha}$ 的值.

17.已知$\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta<\frac{3\pi}{2}$，且$\log_{\sin\alpha}a=1,\log_{\sin\beta}b=1$，试用$a,b$表示$\sin(\alpha+\beta)$.

18.已知$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3},\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$，且$x,y$均为锐角，求$x-y$的值.

19.定义$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$，

(1)计算$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{4} \end{vmatrix}$的值；

(2)若$f(x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin\frac{\pi}{6} & \sin\frac{2}{3}\pi \end{vmatrix}$，求满足$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2},0<x<\frac{\pi}{2}$的 x 的值.

20.已知$\sin\alpha+\cos\beta=\frac{7}{5},\cos\beta-\sin\alpha=\frac{1}{5},\alpha,\beta\in(0,\pi)$，求$\sin(\alpha-\beta)$的值.

第 5 讲:两角和差的余弦、正弦、正切(二)

[课后练习]

I 填空题

1.已知 $(1+\tan A)\cdot(1+\tan B)=2$，则 $\tan(A+B)=$____________.

2.计算 $(1+\tan 17^\circ)(1+\tan 31^\circ)(1+\tan 28^\circ)(1+\tan 14^\circ)=$________________.

3.已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{4},\tan(\beta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{3}$，则 $\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=$____________.

4.已知 $\tan(\dfrac{\pi}{4}+\theta)+\tan(\dfrac{\pi}{4}-\theta)=4,-\pi<\theta<-\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin\theta=$____________.

5.化简 $\tan 2\alpha\tan(15^\circ-\alpha)+\tan 2\alpha\tan(75^\circ-\alpha)+\tan(15^\circ-\alpha)\tan(75^\circ-\alpha)=$____________.

6.将 $\sin\theta+\cos\theta$ 化成 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式为____________.

7.化简 $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}=$____________.

8.已知 α,β 是锐角，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\tan(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\beta=$____________.

9.$\triangle ABC$ 中，$\sin(A+B)=\dfrac{2}{3},\cos B=-\dfrac{3}{4}$，则 $\cos A=$____________.

10.若 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2},\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，则 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=$____________.

II 选择题

11.已知 $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=m$，且 β 为第三象限角，则 $\cos\beta=($　　$)$

A. $\sqrt{1-m^2}$；B. $-\sqrt{1-m^2}$；C. $\sqrt{1+m^2}$；D. $-\sqrt{1+m^2}$.

12.计算 $2\cos 40^\circ\cdot(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)$ 的值为(　　)

A. $\sqrt{3}$；B. 1；C. 2；D. 3.

13.对任意的锐角 α,β，下列不等关系成立的是(　　)

A. $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$；B. $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$；

C. $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$；D. $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$.

14.在平面直角坐标系中，$A(\cos\alpha,\sin\alpha),B(\cos\beta,\sin\beta)$，则$|AB|$的取值范围是(　　)

A. $(0,2)$；B. $[0,\sqrt{2}]$；C. $[0,2]$；D. $[\sqrt{2},2]$.

15.若 $f(x)=2^{\sin x},g(x)=2^{\cos x},x\in\mathbb{R}$，则积函数 $f(x)\cdot g(x)$ 必有(　　)

A. 最大值 4；B. 最小值 4；C. 最大值 $2^{\sqrt{2}}$；D. 最小值 $2^{\sqrt{2}}$.

III 解答题

16.已知$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且$\sin\beta=\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$，$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，当$\tan\beta$取最大值时，求$\tan(\alpha+\beta)$的值.

17.已知$\sin\alpha,\sin\beta$是方程$x^2-\sqrt{2}\cos20^\circ\cdot x+\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}=0$的两个根，其中$\alpha,\beta$都是锐角，求$\alpha,\beta$的值.

18.已知$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{7\sqrt{2}}{10},\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{7}{25}$，求$\sin\alpha,\tan(\alpha+\frac{\pi}{3})$的值.

19.$\triangle ABC$中，已知$\lg\tan B$是$\lg\tan A,\lg\tan C$的算数平均数，求角 B 的取值范围.

20.已知α为第二象限角，且$\sin\alpha=\frac{3}{5},\beta$为第一象限角，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，求$\tan(2\alpha-\beta)$的值.

第 6 讲:二倍角的正弦、余弦、正切

[知识概要]

1.二倍角公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$；

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$；

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

2.三倍角公式

$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$；$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$；$\tan 3\alpha = \dfrac{\tan^3\alpha - 3\tan\alpha}{3\tan^3\alpha - 1}$.

[课后练习]

I 填空题

1.计算 $2\sin 75^\circ \cos 15^\circ - 1 =$____________.

2.已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2} = 2$，则 $\tan(\alpha + \dfrac{\pi}{4}) =$____________.

3.已知 $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha =$____________.

4.已知 $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}, \alpha \in (-2\pi, -\dfrac{3\pi}{2})$，则 $\sin 2\alpha =$____________.

5.已知 $\dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{1}{5}$，则 $\tan x + \cot x =$____________.

6.已知 $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}, 2\pi < \alpha < 3\pi$，那么 $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2} =$____________.

7.在等腰三角形 ABC 中，$B = C, \sin B = \dfrac{3}{5}$，则 $\cos A =$____________.

8.若 $\tan A + \cot A = 6$，则 $\sin 2A =$____________.

9.若 $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} + \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\cos 2\alpha$，则 α 是第____________象限角.

10.若 α 是第一象限角，且 $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$，则 $\dfrac{\sin(\alpha + \dfrac{\pi}{4})}{\cos(2\alpha + 2\pi)} =$____________.

II 选择题

11. $\tan\frac{\pi}{8}-\cot\frac{\pi}{8}$ 的值为(　　)

A. -2；B. -1；C. 2；D. 0.

12.设 $0<\alpha<\pi, \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\cos 2\alpha$ 的值是(　　)

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$；B. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$；C. $\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$；D. $-\frac{1}{4}$.

13.若 $f(\cos x)=\cos 2x$，则 $f(\sin 75^{\circ})$ 的值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$；B. $\frac{1}{2}$；C. $-\frac{1}{2}$；D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14.若 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值为(　　)

A. $-\frac{1}{2}$ 或 2；B. $\frac{1}{2}$ 或-2；C. 2；D. $\frac{1}{2}$.

15. $\alpha\in(0,\pi), \sin\alpha, \cos\alpha$ 分别是关于 x 的方程 $25x^2-35x+12=0$ 的两个根，则 $\cos 2\alpha$ 的值是(　)

A. $\frac{7}{25}$；B. $-\frac{7}{25}$；C. $\pm\frac{7}{25}$；D. $\frac{24}{25}$.

III 解答题

16.已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi), \tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$，求 $\tan(\alpha-2\beta)$ 的值.

17.若 $\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \beta$ 是第二象限角，求 $\tan 2\beta$ 的值.

18.已知函数 $f(x)=x^2-2\sin\theta\cdot x+\sin\theta$ 在 $x\in[0,1]$ 上有最小值 $-\frac{1}{4}$，求 $\cos 2\theta$ 的值.

19.已知方程 $x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$ 的一个根是 $\sqrt{2}-1$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

20.已知 $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{5}{13},\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$，求 $\frac{\cos 2\alpha}{\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$ 的值.

第 7 讲:期中练习

I 填空题

1.若α是第四象限角，则$\pi-\alpha$是第____________象限角.

2.若一圆弧长等于其所在圆内的内接正三角形的边长，则其圆心角的弧度数为_____________.

3.点$P(3,y)$在角α的终边上，其中$y<0,\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则$\tan\alpha=$____________.

4.若$\tan x=2$，则$\dfrac{1}{1-\sin x}+\dfrac{1}{1+\sin x}=$____________.

5.第一象限角α满足$\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3+2\sqrt{2}$，则$\cos\alpha=$____________.

6.若函数$f(\cos x)=\dfrac{x}{2},0\le x\le\pi$，则$f(-\dfrac{1}{2})=$____________.

7.已知锐角θ满足$\log_{\tan\theta+\cot\theta}\sin\theta=-\dfrac{3}{4}$，则$\log_{\tan\theta}\cos\theta=$____________.

8.已知锐角α,β,γ满足$\sin\alpha+\sin\gamma=\sin\beta,\cos\alpha-\cos\gamma=\cos\beta$，则$\alpha-\beta=$____________.

9.若α,β为锐角，满足$\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{5}$，则$\sin\beta=$_____________.

10.已知$\tan\alpha,\tan\beta$是关于x的方程$mx^2-2x\sqrt{7m-3}+2m=0$的两个实根，则$\tan(\alpha+\beta)$的取值范围是____________.

II 选择题

11.集合$M=\{x\mid x=\dfrac{k\pi}{2}\pm\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}\}$与$P=\{x\mid x=\dfrac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}\}$之间的关系是(　　)

A. $M\subsetneq P$；B. $P\subsetneq M$；C. $M=P$；D. $M\bigcap P=\varnothing$.

12.若$\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{3}{5}$，则(　　)

A. $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$；B. $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$；C. $\sec\alpha=-\dfrac{5}{4}$；D. $\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{3}{5}$.

13.若三角形的两内角α,β满足$\tan\alpha\cdot\tan\beta>1$，则这个三角形的形状是(　　)

A. 等腰直角三角形；B. 不等腰的直角三角形；C. 锐角三角形；D. 钝角三角形.

14.若$\alpha\in[\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2}]$，则$\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}$的值为(　　)

A. $2\cos\dfrac{\alpha}{2}$；B. $-2\cos\dfrac{\alpha}{2}$；C. $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$；D. $-2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

15.若$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5},\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$，则角$\alpha$所在的象限是(　　)

A. 第一象限；B. 第二象限；C. 第三象限；D. 第四象限.

III 解答题

16.证明下列各式

(1) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cot\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}=1-\sin\alpha\cos\alpha$；(2) $\frac{\cot\alpha+\csc\alpha-1}{\cot\alpha-\csc\alpha+1}=\cot\alpha+\csc\alpha$.

17.已知$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5},\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，其中$\alpha+\beta\in(\frac{7}{4}\pi,2\pi),\alpha-\beta\in(\frac{3}{4}\pi,\pi)$，求$\cos 2\alpha$.

18.已知$\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{5}{13},0<x<\frac{\pi}{4}$，则$\frac{\cos 2x}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}$的值.

19.已知$\tan(\alpha+\beta)=-2,\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，求$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$的值.

20.已知$\cos(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{4}{5},\frac{19\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{4}$，求$\frac{\sin 2x-2\sin^2 x}{1-\tan x}$的值.

第 8 讲:半角的正弦、余弦、正切

[知识概要]

1.半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ ;\ \ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ ;\ \ \tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

2.万能置换公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}},$$

以上式中的 $\alpha\neq 2k\pi+\pi,k\in\mathbb{Z}$，如设 $\tan\frac{\alpha}{2}=t$，常可将含 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ 的三角式化为关于字母 t 的代数式，给解题带来方便.

[课后练习]

I 填空题

1. $\tan 225^\circ=$____________；$\sin 15^\circ=$____________.

2.化简 $\dfrac{1-\cos 2\beta}{\sin 2\beta}=$_______________.

3.化简 $\dfrac{1+\tan^2\alpha}{\tan\alpha}=$_______________.

4.已知 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5},\alpha\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，则 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=$____________.

5.若 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，则 $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}=$____________.

6.已知 $\dfrac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$，则 $\sqrt{2-2\cos\alpha}-\sqrt{4+4\sin\alpha}=$____________.

7.若 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=$____________.

8.在等腰三角形 ABC 中，若 $AB=AC,\sin A=\dfrac{4}{5}$，则 $\cos B=$____________.

9.若 $f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$，则 $f(\dfrac{4\pi}{3})=$____________.

10.已知集合 $A=\{x\,|\,x^2\geq\frac{1}{4}\},B=\{x\,|\,x=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}\}$，若 $B\subsetneqq A$，则 α 的取值范围是.

II 选择题

11.已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，若 $\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\sin\alpha-\cos\alpha=($　　$)$

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$；B. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$；C. $\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$；D. $\frac{2}{5}$.

12.若 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$，则(　　)

A. $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；B. $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$；C. $\tan\theta=1$；D. $\tan\theta=-1$.

13.已知 $\tan\frac{\alpha}{2}=-2-\sqrt{3}$，若 α 的终边经过点 $P(-\sqrt{3},y)$，则 $y=($　　$)$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$；B. ±1；C. 1；D. -1.

14.已知 $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 β 在第三象限，则 $\cos\frac{\beta}{2}=($　　$)$

A. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$；B. $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$；C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$；D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

15.已知 α 是锐角，当 $f(\alpha)=\dfrac{\cos 2\alpha+1}{\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}$ 取到最大值时，α 的值是(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$；B. $\frac{\pi}{6}$；C. $\frac{\pi}{4}$；D. $\frac{\pi}{3}$.

III 解答题

16.化简 $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}$.

17.已知$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=2+\sqrt{3}$，求$2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-1$的值.

18.已知$\alpha,\beta\in(0,\pi),\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，且$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求$\cos\beta$.

19.已知$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=4+2\sqrt{3}$，其中$\frac{1}{4^{\sin\theta}}>1$，求$\tan\frac{\theta}{2}$的值.

20.已知$\sin(\alpha+\frac{3\pi}{4})=\frac{5}{13},\cos(\frac{\pi}{4}-\beta)=\frac{3}{5}$，且$-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{3\pi}{4}$，求$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$的值.

第 9 讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(一)

[知识概要]

1.角关系：在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$.

2.正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$(R 为三角形外接圆的半径)

3.余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

4.三角形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，$S=\dfrac{abc}{4R}$，$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$；

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$；$S=pr$，其中$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，r 为内切圆半径.

5.三角形解的情况

	$A>90^\circ$	$A=90^\circ$	$A<90^\circ$	
$a>b$	无解	一解	一解	
$a=b$	无解	无解	一解	
$a<b$	无解	无解	$b>a>b\sin A$	两解
			$a=b\sin A$	一解
			$a<b\sin A$	无解

[课后练习]

I 填空题

1.已知$\triangle ABC$中，$a=1,b=\sqrt{3},A=\dfrac{\pi}{6}$，则$C=$____________.

2.$\triangle ABC$中，$a<b<c$，$AB=\sqrt{6}+\sqrt{2},AC=2\sqrt{2},AB$边上的高$CD=\sqrt{2}$，则$C=$____________.

3.$\triangle ABC$的外接圆半径为 4，则$\dfrac{2b}{\sin B}+\dfrac{\sin C}{c}=$____________.

4.$\triangle ABC$满足$\cos^2 B-\cos^2 C=\sin^2 A$，则此三角形的形状为____________.

5.$\triangle ABC$中，已知$a=2,A=\dfrac{\pi}{4}$，若此三角形有两解，则b的取值范围是____________.

6.等腰三角形一腰长是底边长的 4 倍，则底角的正弦是____________.

7.已知$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)$，则$A=$___________.

8.已知$\triangle ABC$的三个内角A,B,C，且方程$Bx^2+(A+C)x+B=0$有两个相等的实根，

$a\cos C=c\cos A$，则$\triangle ABC$是____________三角形.

9.已知$\triangle ABC$的三个内角为A,B,C，满足$2B=A+C$，周长为20cm，面积为$10\sqrt{3}cm^2$，则$b=$____.

10.$\triangle ABC$中，若$\sin A\cdot\cos^2\dfrac{C}{2}+\sin C\cdot\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}\sin B$，那么它的三边关系是___________.

II 选择题

11.已知$a,a+1,a+2$是锐角三角形三边长，则a的取值范围是(　　)

A. $1<a<3$；B. $a>1$；C. $a>3$；D. $0<a<1$.

12.$\triangle ABC$中，$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$，则$\triangle ABC$是(　　)

A. 等腰三角形；B. 直角三角形；C. 等腰或直角三角形；D. 等腰直角三角形.

13.$\triangle ABC$中，满足$\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$，则$\triangle ABC$是(　　)

A. 等腰三角形；B. 直角三角形；C. 等边三角形；D. 无法确定.

14.$\triangle ABC$中，$A+C=2B$，且$b^2=ac$，则$\triangle ABC$是(　　)

A. 等腰三角形；B. 直角三角形；C. 等边三角形；D. 无法确定.

15.下列命题不正确的是(　　)

A. 任何三角形的三边之比不可能为$1:2:3$；

B. 若$\triangle ABC$中，$a^2>b^2+c^2$，则$A>B+C$；

C. $\triangle ABC$中，$4\sin A\cos A=0$，则$\triangle ABC$一定是直角三角形；

D. a,b,c是三角形三边，满足$a^2+b^2-c^2>0$，则$\triangle ABC$为锐角三角形.

III 解答题

16.$\triangle ABC$中，$2B=A+C,b^2=ac$，试判断$\triangle ABC$形状.

17. $\triangle ABC$中，若$a^2=b(b+c)$，

(1)求证$A=2B$；(2)若$a=\sqrt{3}b$，判断$\triangle ABC$的形状.

18.已知四边形$ABCD, A=C=\dfrac{\pi}{2}, B=\dfrac{\pi}{3}, AC=\sqrt{15}$，求$BD$的长.

19. $\triangle ABC$中，$a^2+b^2=c^2+ab$，且$\sin A\sin B=\dfrac{3}{4}$，判断$\triangle ABC$的形状.

20. $\triangle ABC$中，$\sin A+\sin B=\sin C(\cos A+\cos B)$，

(1)判断$\triangle ABC$的形状；(2)若$c=1$，求其内切圆半径的取值范围.

第 10 讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(二)

[课后练习]

I 填空题

1. $\triangle ABC$ 中，$c=1,b=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$，则 $A=$____________.

2. 若 $\triangle ABC$ 中，$\sin A+\cos A=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2A=$____________.

3. $\triangle ABC$ 中，$a=7,b=10,c=15$，则 $\tan\dfrac{A}{2}=$____________.

4. $\triangle ABC$ 中，$B=\dfrac{\pi}{4},c=5\sqrt{2},b=5$，则 $a=$____________.

5. 等腰三角形的一边为 4，一边为 7，其顶角的余弦值为____________.

6. 已知 $\triangle ABC$ 中，$A=\dfrac{\pi}{3},B=\dfrac{\pi}{4},c=1$，则面积为____________.

7. $\triangle ABC$ 中，已知 $a=7,b=8,\cos C=\dfrac{13}{14}$，则最大角的余弦值为____________.

8. $\triangle ABC$ 中，$C=\dfrac{\pi}{3},a+b=2\sqrt{3}+2,c=2\sqrt{2}$，则 $A=$____________.

9. $\triangle ABC$ 中，已知 $a=4,b=1,c=4$，则 $\angle BAC$ 的平分线的长为____________.

10. 半径分别为 2 和 3 的两圆相交，圆心距为 4，则两圆的公共弦长为____________.

II 选择题

11. $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A\sin B=\cos^2\dfrac{C}{2}$，则 $\triangle ABC$ 是(　　)

A. 直角三角形；B. 等腰三角形；C. 等边三角形；D. 等腰直角三角形.

12. $\triangle ABC$ 中，$A<B$ 是 $\cos^2 A>\cos^2 B$ 的(　　)

A. 充分非必要条件；B. 必要非充分条件；C. 充要条件；D. 既不充分又不必要条件.

13. A,B 是锐角三角形 ABC 的两个内角，则点 $P(\cos B-\sin A,\sin B-\cos A)$ 在(　　)

A. 第一象限；B. 第二象限；C. 第三象限；D. 第四象限.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$，则三角形是(　　)

A. 锐角三角形；B. 直角三角形；C. 钝角三角形；D. 无法确定.

15.等腰三角形的底角正弦值和余弦值的和为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，则它的顶角是(　　)

A. $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$；B. $\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$；C. $\frac{\pi}{6}$；D. $\frac{\pi}{12}$.

III 解答题

16.$\triangle ABC$中，$(\sin B+\sin C):(\sin C+\sin A):(\sin A+\sin B)=4:5:6$，求最大角.

17.等腰直角三角形中，外接圆半径与内切圆半径之比为多少.

18.$\triangle ABC$中，已知a,b,c满足$(a+b+c)(a-b+c)=ac$，求B.

19.已知$\triangle ABC$面积$S=a^2-(b-c)^2$，且$b+c=8$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

20.已知$\triangle ABC$中，$c=\sqrt{2}+\sqrt{6},C=\frac{\pi}{6}$，求$a+b$的最大值.

第 11 讲:三角比综合

[课后练习]

I 填空题

1.设θ是第一象限角，且满足$\sqrt{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=-\sin\dfrac{\theta}{2}$，则$\dfrac{\theta}{2}$是第____________象限角.

2.若角α的终边落在射线$y=-2x,x\le 0$上，则$\cos\alpha=$____________.

3.若$\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{1}{5}$，则$\cos 2\alpha=$____________.

4.已知$\cos(\dfrac{\pi}{4}+\theta)\cdot\cos(\dfrac{\pi}{4}-\theta)=\dfrac{1}{4}$，则$\cos 2\theta=$____________.

5.在$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{2\pi}{3},a=\sqrt{2},c=1$，则$b=$____________.

6.设α,β是锐角，且$\tan\alpha=\dfrac{4}{3},\tan\beta=\dfrac{1}{7}$，则$\alpha-\beta=$____________.

7.设θ是第二象限角，$\sin\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=$____________.

8.使等式$\dfrac{\sqrt{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}}{1-\sin\dfrac{\theta}{2}}=\sec\dfrac{\theta}{2}+\tan\dfrac{\theta}{2}$成立的$\theta$的取值范围为____________.

9.已知A,B,C为$\triangle ABC$的三个内角，则$\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos A=$__________.

10.$\triangle ABC$中，$\sin A+\cos A=\dfrac{1}{3}$，则$\tan A=$____________.

II 选择题

11.化简$2\sqrt{1-\sin 8}+\sqrt{2+2\cos 8}=($　　$)$

A. $-4\cos 4$；B. $-2\sin 4-4\cos 4$；C. $-2\sin 4$；D. $4\cos 4-2\sin 4$.

12.设$\alpha\in(0,\pi),\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，则$\cos 2\alpha=($　　$)$

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$；B. $-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$；C. $\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$；D. $-\dfrac{1}{4}$.

13.已知$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1$，则$\sin\theta-\cos\theta=($　　$)$

A. 1；B. -1；C. ± 2；D. ± 1.

14.已知$\cot\alpha=-2$，则$\dfrac{\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha}{4\cos 2\alpha-4\sin 2\alpha}=($　　$)$

A. $-\dfrac{1}{2}$；B. $-\dfrac{4}{3}$；C. $-\dfrac{1}{7}$；D. $\dfrac{1}{4}$.

15.在四边形 ABCD 中，$A=C=\dfrac{\pi}{2},D=\dfrac{2\pi}{3}$，对角线 AC 的长为 8，则对角线 BD 长为(　　)

A. $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$；B. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$；C. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$；D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

III 解答题

16.已知$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi,\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2},\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$，求$\cos\alpha,\cos\beta$.

17.已知α是锐角，比较$\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$与$\tan\alpha$的大小.

18.已知关于x的方程$2x^2-(\sqrt{3}+1)x+m=0$的两根为$\sin\theta,\cos\theta,\theta\in(0,2\pi)$，

(1)求 m 的值；(2)求方程的根，及此时θ的值；(3)求$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$的值.

19.在$\triangle ABC$中，$\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$，判断三角形的形状.

20.是否存在锐角α,β，使$\alpha+2\beta=\dfrac{2\pi}{3},\tan\beta=(2-\sqrt{3})\cot\dfrac{\alpha}{2}$同时成立？若存在，求$\alpha,\beta$的值，若不存在，请说明理由.

第 12 讲:函数综合

[课后练习]

I 填空题

1.幂函数 $y=f(x)$ 的图像过点 $(2,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，则 $f(x)$ 的解析式为____________.

2.计算 $\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50=$____________.

3.若 $f(x)=(\dfrac{1}{3})^x-4$，则 $f^{-1}(5)=$____________.

4.若函数 $f(x)=x^2+2(a-3)x+1$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是____________.

5.已知 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，若 $f(x)=g(x)-2$，且 $f(-7)=7$，则 $f(7)=$____________.

6.函数 $y=\log_2|ax-1|,a\neq 0$ 的对称轴方程为 $x=-2$，则实数 $a=$____________.

7.若函数 $f(x)=\dfrac{bx+1}{4x+3}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-3x}{4x-2}$，则 $b=$____________.

8.函数 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}x$ 的值域为 $[-1,1]$，则函数 $f^{-1}(x)$ 的值域是____________.

9.方程 $\lg x+\lg(x+3)=1$ 的解为____________.

10.已知 $f(x)$ 是偶函数，且 $x>0$ 时， $f(x)=10^x$，则 $x<0$ 时， $f(x)=$____________.

11.若指数函数 $y=a^x$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最大值与最小值的差是 1，则底数 $a=$____________.

12.若函数 $f(x)=(|m|-1)x^2-2(m+1)x-1$ 的图像与 x 轴只有一个交点,则实数 m 的值为________.

II 选择题

13.下列各式中， x 值最大的是(　　)

A. $\log_{\frac{1}{2}}x=-3$；B. $\log_2 x=2$；C. $\log_5 x=1$；D. $\log_{\sqrt{3}}x=3$.

14.下列函数中，值域是 $(0,+\infty)$ 的是(　　)

A. $y=x^2-x+1$；B. $y=\log_2 x$；C. $y=(\dfrac{1}{5})^{1-x}$；D. $y=2x+1,x>0$.

15.如果函数 $f(x+2)=(\frac{1}{3})^{|x|}$，则下列结果正确的是(　　)

A. $f(1)<f(\frac{5}{2})<f(\frac{7}{2})$；B. $f(\frac{7}{2})<f(1)<f(\frac{5}{2})$；

C. $f(\frac{7}{2})<f(\frac{5}{2})<f(1)$；D. $f(\frac{5}{2})<f(1)<f(\frac{7}{2})$.

III 解答题

16.求函数 $f(x)=1+\lg(x+2), x>-1$ 的反函数.

17.判断并证明 $f(x)=\frac{4}{x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

18.已知函数 $f(x)=\lg[(k+2)x^2+(k+2)x+\frac{5}{4}]$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，求实数 k 的范围.

19.若对任意实数，二次函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+30, a\in\mathbb{R}$ 的值均为非负数，求关于 x 的方程 $\frac{x}{a+3}=|a-1|+1$的根的范围.

20.设 $0<a<1$，函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，

(1)求 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2)求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$；

(3)实数 k 取何值时，关于 x 的方程 $f^{-1}(x)+a^{-x}=k$ 在区间 $(\log_a 4, 0]$ 上有两相异的实数解，并求出这时两解的和.

[参考答案]

第 1 讲:任意角及其度量

1. $\frac{7}{36}\pi,\frac{5}{12}\pi,36,-420$；2. $\{-\frac{6\pi}{5},-\frac{\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{9\pi}{5}\}$；3. $\frac{\pi}{16}$；4. $\frac{4\pi}{5}$；5. 1350；6. 二，一；7. -6π；8. $-\frac{11\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}$；9. $\frac{7\pi}{12}$；10. $\frac{\pi}{2}r$.

11. D；12. A；13. B；14. C；15. D.

16.(1) 1.45；(2)3437.

17. $4\pi a^2$.

18. 3

19. $A\cap B=[-3,-\frac{3\pi}{4})\cup(0,\frac{\pi}{4})$.

20. $\theta=0.8,\omega=400$.

第 2 讲:任意角的三角比

1. $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},1$；2. $\cos1900^\circ<\cos(-430^\circ)<\sin870^\circ<\sin(-2095^\circ)<\tan1310$；

3. $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi),k\in\mathbb{Z}$；4. 四；5. 一或三；6. 0；7. a^2+b^2-2ab；8. $\frac{7}{5}$；9. 一或三；

10. $\frac{1}{3}$.

11. C；12. D；13. A；14. B；15. B.

16. $A\cap B=[-2\pi,-\pi]\cup[0,\pi]$.

17. $\theta\in(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}),k\in\mathbb{Z}$.

18. $\frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}<\csc\alpha$.

19. θ 在第一象限.

20. $\theta\in(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}),k\in\mathbb{Z}$.

第 3 讲:同角三角比

1. 1；2. 1；3. $\cot^2\theta$；4. $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$；5. 2；6. $\sin\alpha\cos\alpha$；7. 1；8. $\cos^2 A$；9. 2,-9,0；10. $\frac{1}{2^{100}}$.

11. A；12. C；13. D；14. D；15. C.

16.略

17.原式$=\dfrac{|\cos\alpha|}{1+\sin\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha},\alpha\in(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}),k\in\mathbb{Z}\\-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha},\alpha\in(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}),k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

18.略

19. 1

20.略

第 4 讲:两角和差的余弦、正弦、正切(一)

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；2. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$；3. 0；4. $-\cos\theta$；5. 0；6. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；7. $-\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$；8. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；9. $\dfrac{\pi}{4}$；10. $\sin 3$.

11. A；12. C；13. B；14. D；15. B.

16. $\dfrac{3}{2}$.

17. $-a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}$.

18. $\dfrac{\pi}{6}$.

19. (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}-1$；(2) $\dfrac{\pi}{12}$.

20. 0 或 $\dfrac{24}{25}$.

第 5 讲:两角和差的余弦、正弦、正切(二)

1. 1；2. 4；3. $\dfrac{1}{3}$；4. $-\dfrac{1}{2}$；5. 1；6. $\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$；7. $\cot\alpha$；8. $\dfrac{9}{50}\sqrt{10}$；9. $\dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$；

10. 5.

11. D；12. C；13. D；14. C；15. C.

16. $\tan\beta\le\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当 $\tan(\alpha+\beta)=\sqrt{2}$ 时等号成立.

17. $\begin{cases}\alpha=25^\circ,\\ \beta=65^\circ\end{cases}\begin{cases}\alpha=65^\circ,\\ \beta=25^\circ\end{cases}$.

18. $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{48-25\sqrt{3}}{11}$.

19. $B\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$.

20. $\dfrac{204}{253}$.

第 6 讲:二倍角的正弦、余弦、正切

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；2. $-\dfrac{1}{7}$；3. $\dfrac{16}{25}$；4. $\dfrac{24}{25}$；5. $-\dfrac{25}{12}$；6. $-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$；7. $-\dfrac{7}{25}$；8. $\dfrac{1}{3}$；9. 二；10. $-\dfrac{13}{14}\sqrt{2}$.

11. A；12. C；13. A；14. C；15. C.

16. $\dfrac{7}{24}$；17. $\dfrac{24}{7}$；18. $\dfrac{7}{8}$；19. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；20. $\dfrac{24}{13}$.

第 7 讲:期中练习

1. 三；2. $\sqrt{3}$；3. $-\dfrac{4}{3}$；4. 10；5. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；6. $\dfrac{\pi}{3}$；7. $\dfrac{1}{2}$；8. $-\dfrac{\pi}{3}$；9. $\dfrac{7}{25}$；10. $[-\dfrac{7}{3}\sqrt{3},-2\sqrt{2}]$.

11. A；12. D；13. C；14. D；15. D.

16.略

17. $-\dfrac{7}{25}$.

18. $\dfrac{24}{13}$.

19. $\dfrac{3}{5}$.

20. $-\dfrac{7}{25}$.

第 8 讲:半角的正弦、余弦、正切

1. $\sqrt{2}-1,\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$；2. $\tan\beta$；3. $2\csc 2\alpha$；4. $-\dfrac{1}{2}$；5. $-\cos\dfrac{\alpha}{2}$；6. $2\cos\dfrac{\alpha}{2}$；7. $\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}$；8.

$\frac{\sqrt{5}}{5}$或$\frac{2\sqrt{5}}{5}$；9. $\sqrt{3}$；10. $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$.

11. A；12. C；13. D；14. A；15. C.

16. $\cot\alpha$.

17. $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，原式$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

18. $-\frac{16}{65}$.

19. $-\sqrt{3}-1$.

20. $-\frac{7}{130}\sqrt{130}$.

第 9 讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(一)

1. $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}$；2. $\frac{7\pi}{12}$；3. $\frac{129}{8}$；4. 直角三角形；5. $(2,2\sqrt{2})$；6. $\frac{3}{8}\sqrt{7}$；7. $\frac{\pi}{4}$；8. 等边；9. 7；10. $a+c=2b$.

11. C；12. A；13. D；14. C；15. D.

16. 等边三角形.

17. 直角三角形.

18. $BD=2\sqrt{5}$.

19. 等边三角形.

20. 直角三角形；$r\in(0,\frac{\sqrt{2}-1}{2}]$.

第 10 讲:正弦定理、余弦定理和解斜三角形(二)

1. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$；2. $-\frac{\sqrt{17}}{9}$；3. $\frac{\sqrt{6}}{12}$；4. 5；5. $-\frac{17}{32}$或$\frac{41}{49}$；6. $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$；7. $-\frac{1}{7}$；8. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{12}$；9. $\frac{6}{5}$；10. $\frac{3}{8}\sqrt{15}$.

11. B；12. C；13. B；14. C；15. A.

16. $\frac{2\pi}{3}$.

17. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

18. $\dfrac{2\pi}{3}$.

19. $S \le \dfrac{64}{17}$.

20. $a+b \le 8+4\sqrt{3}$.

第 11 讲:三角比综合

1. 三；2. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；3. $\pm\dfrac{7}{25}$；4. $\dfrac{1}{2}$；5. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；6. $\dfrac{\pi}{4}$；7. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；8. $(4k\pi-\pi, 4k\pi+\pi), k\in\mathbb{Z}$；

9. 0；10. $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}$.

11. D；12. B；13. D；14. C；15. A.

16. $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}, \cos\beta=-\dfrac{16}{65}$.

17. 当 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}<\tan\alpha$；当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\tan\alpha$；当 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}>\tan\alpha$.

18. $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \theta=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}$；原式$=\dfrac{5\sqrt{3}+5}{4}$或$\dfrac{3\sqrt{3}-1}{4}$.

19. 直角三角形.

20. 存在$\alpha=\dfrac{\pi}{6}, \beta=\dfrac{\pi}{4}$满足条件.

第 12 讲:函数综合

1. $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$；2. 1；3. -2；4. $a\le -1$；5. -11；6. $a=-\dfrac{1}{2}$；7. 2；8. $[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$；9. $x=2$；10. 10^{-x}；11. $\dfrac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$；12. 0 或 1.

13. A；14. C；15. B.

16. $f^{-1}(x)=10^{x-1}-2, x>1$.

17. $f(x)=\dfrac{4}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

18. $k\in[-2,3)$.

19. $[\dfrac{9}{4},18]$.

20. $D=\mathbb{R},A=(-\infty,0]$； $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x}),x\le 0$； $k\in(\sqrt{3},2],x_1+x_2=\log_a 3$.