

# 初一数学暑假班新编教案

## 目录

第 1 讲	9.1-9.3 代数式及代数式的值.....	2
第 2 讲	9.4-9.5 整式及合并同类项.....	6
第 3 讲	9.6 整式的加减.....	9
第 4 讲	9.7 同底数幂的乘法.....	12
第 5 讲	9.8 幂的乘方.....	15
第 6 讲	9.9 积的乘方.....	17
第 7 讲	阶段测试一	
第 8 讲	9.10 整式的乘法.....	19
第 9 讲	9.11 平方差公式.....	21
第 10 讲	9.12 完全平方公式.....	24
第 11 讲	9.10-9.12 复习.....	26
第 12 讲	9.13-9.14 因式分解、提公因式法、公式法.....	29
第 13 讲	阶段测试二.....	33
第 14 讲	9.15 十字相乘法.....	35
第 15 讲	9.16 分组分解法.....	38
第 16 讲	因式分解复习.....	42

**【知识点梳理 1】字母表示数**

1. 字母表示数要注意的几点:

数字与字母及字母与字母的乘号要省略;

除法运算要用分数线来表示;

数学应写在字母的前面,当字母前的数字是1的时候应省略不写(当字母前的数字是带分数时,一定要带分数化成假分数);

**【例题分析】**

例 1. ★填空题

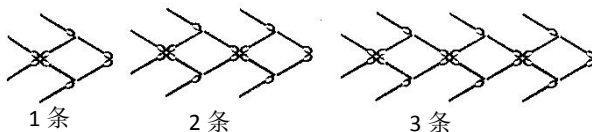
- (1) 某种足球  $a$  元, 则涨价 20% 后是\_\_\_\_\_元;
- (2)  $m$  箱橘子重  $x$  kg, 每箱重\_\_\_\_\_ kg;
- (3) 购买单价为  $a$  元的笔记本 8 本, 共需人民币\_\_\_\_\_元;
- (4) 小明的体重是  $a$  kg, 小红比小明重  $b$  kg, 则小红的体重是\_\_\_\_\_ kg;
- (5) 张师傅第一天生产  $a$  个零件, 第二天比第一天减少 5%, 第二天生产零件\_\_\_\_\_个.

例 2. ★设某数为  $x$ , 用  $x$  表示下列各数:

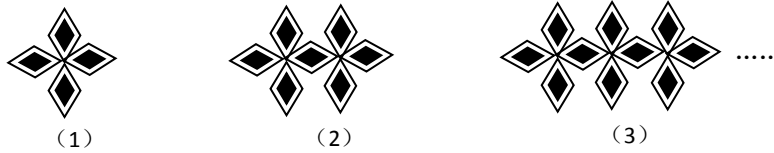
- (1) 某数与  $\frac{1}{2}$  的差;
- (2) 某数的  $\frac{1}{2}$  与  $\frac{1}{3}$  的和;
- (3) 某数与 1 的差的平方;
- (4) 某数与 2 的和的倒数;
- (5) 某数的 30% 除以  $a$  的商.

例 3. ★★  $x$  表示一个两位数,  $y$  表示一个两位数, 把  $x$  放在  $y$  的左面, 末位再添上 1 得到一个五位数, 求这个五位数等于多少?

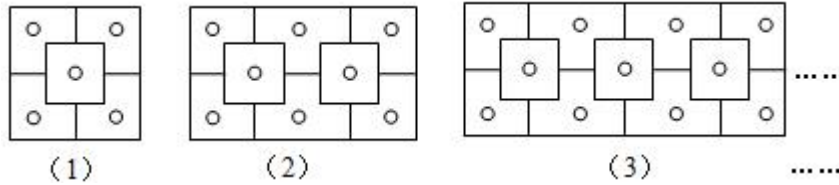
例 4. ★★ 如下图是小明用火柴搭的 1 条、2 条、3 条“金鱼“……, 则搭  $n$  条“金鱼“需要火柴多少根?



例 5. ★★如图是一组有规律的图案，第 1 个图案由 4 个基础图形组成，第 2 个图案由 7 个基础图形组成，……，第  $(x+y)(y-x)-4xy$  ( $n$  是正整数) 个图案中由\_\_\_\_\_个基础图形组成.



例 6. ★★★下列图案是晋商大院窗格的一部分，其中“○”代表窗纸上所贴的剪纸，则第  $n$  个图中所贴剪纸“○”的个数？



例 7. ★★★某城市固定电话的收费标准是：三分钟以内（不足三分钟按三分钟计算）收 0.22 元，以后每分钟收 0.11 元，请写出通话时间  $t$  分钟应交的电话费？

### 【知识点梳理 2】代数式

1. 代数式的概念：代数式是用运算符号把表示数的字母连接而成的式子.

注：①单独一个数或一个字母也是代数式；②“=”不是运算符号，不能将等式与代数式混淆)

2. 列代数式

①抓住关键性词语，如“大”、“小”、“多”、“少”、“和”、“差”、“积”、“商”、“倍”、“分”等。

②理清运算顺序. 对于一些数量关系的运算顺序，一般是先说的运算在前，后说的运算在后.

③正确使用括号

例 8. ★下列各式，哪些是代数式？

(1)  $x+6$ ;                      (2)  $a^2+b=b+a^2$ ;                      (3)  $4x+1>7$ ;

(4)  $0$ ;                              (5)  $\frac{2}{3}-x$ ;                              (6)  $4a+3\neq 0$ ;

(7)  $2^3-6$ ;                      (8)  $8m+2n<0$ ;                      (9)  $a^2-2ab+4b^2$ ;

(10)  $4m^2-m+\frac{1}{4}$ ;      (11)  $(a-b)^2-2a-2b+1$ ;      (12)  $(16-8x+x^2)cm^2$ .

例 9. ★写出下列代数式

(1) 用代数式表示： $x$  平方的倒数减去  $\frac{1}{2}$  的差；

(2) 1 千克桔子价格为  $a$  元，小明买了 10 千克桔子，用字母  $a$  表示小明买的桔子的总钱数；

(3)  $x$  与  $y$  的  $\frac{4}{7}$  的和；

(4) 比  $a$  与  $b$  的差的一半小 2；

(5)  $a$ 、 $b$  的倒数的差与  $a$ 、 $b$  的倒数和的积的 2 倍；

(6)  $a$  的 2 倍与  $b$  平方的差；

(7)  $a$  与  $b$  平方的 2 倍的差.

例 10. ★填空题

(1) 2000 元人民币存入银行，定期 2 年，年利率  $k$ ，扣除 20% 的利息税后，到期取得本利和\_\_\_\_\_元.

(2) 一种商品进价为每件  $a$  元，按进价增加 25% 出售，则售价是\_\_\_\_\_元；后因库存积压降价，按售价的九折出售，则此时的售价为\_\_\_\_\_元，每件还盈利\_\_\_\_\_元.

(3) 某市去年 GDP 为 180 亿，今年比去年增加  $x\%$ ，今年该市的 GDP 是\_\_\_\_\_.

例 11. ★★商品原价为 100 元，连续经过两次降价一次提价，且每次降价、提价的百分比都是  $m$ ，那么该商品现在的价格是多少元？

例 12. ★★甲乙两地间的公路全长为 100 千米，某人从甲地到乙地每小时走  $m$  千米.

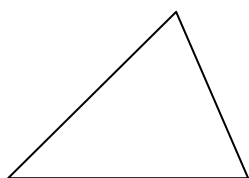
(1) 某人从甲地到乙地需要走多少个小时？(2) 如果每小时多走 2 千米，某人从甲地到乙地需要走多少个小时？(3) 速度变化后，某人从甲地到乙地比原来少用了多少个小时？

例 13. ★★★ 一个三角形，分别连结这个三角形三边的中点得到图 (2)，再分别连结图 (2) 中间的小三角形三边的中点，得到图 (3)，按此继续下去，请你根据每个图形中的三角形个数的规律，完成下列问题.

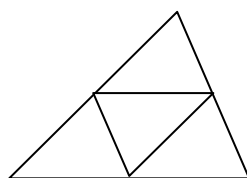
(1) 将下表填写完整

图型编号	1	2	3	4	5	.....
三角形个数	1	5	9			.....

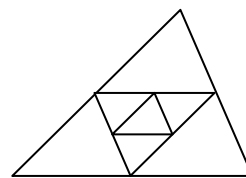
(2) 在第  $n$  个图形中有 \_\_\_\_\_ 个三角形 (用含  $n$  的式子表示) \_\_\_\_\_



(1)



(2)



(3)

## 第二讲 代数式的值、整式

### 【知识点梳理 1】代数式的值

1. 代数式的值：用数字代替代数式里的字母，按照代数式中的运算关系计算得出的记过叫做代数式的值。

2. 求代数式的值

第一步：用数值代替代数式里的字母。

第二步：按照代数式指明的运算，计算出结果。

### 【例题分析】

例 1. ★求多项式  $3x^2 + 2x - (-x^2) - 4x^2$  的值。

例 2. ★当  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{3}$  时，多项式  $2x^2y + 3xy^2 - (-2xy^2) - 5x^2y + (-2x^2y) + 3xy - \frac{1}{2}$  的值。

例 3. ★已知： $|2x+1| + |y+1| = 0$ ，求多项式  $3xy + 2x^2y^2 - (-2x^2y^2) + (-3xy) + x + y$  的值。

例 4. ★★已知： $x^2 - x - 1 = 0$ ，则  $-x^3 + 2x^2 + 2002$  的值是多少？

例 5. ★★已知  $|a| = 4$ ,  $|b| = 2$ ,  $|a+b| = a+b$ ，求  $a-b$  的值。

例 6. ★★小明同学在课外碰到了这样一道题，计算  $-6x^4 - 3y + 5$  的值，其中

$x = -2$ ,  $y = 3$ 。小明一时粗心，把  $x = -2$  错写成  $x = 2$ ，但他发现自己的计算结果也是正确的，你知道这是为什么吗？小明计算的结果是多少？

例 7. ★★★已知：关于  $x$  的二次多项式  $a(x^3 - x^2 + 3x) + b(2x^2 + x) + x^3 - 5$ ，当  $x = 2$  时的值为  $-17$ ，求当  $x = -2$  时，该多项式的值。

### 【知识点梳理 2】 整式的基本概念

1. 单项式：由数字与字母的积或字母与字母的积所组成的代数式叫做单项式。  
注：单独的一个字母或数也叫做单项式。
2. 的次数：是指单项式中所有字母的指数和。例如：单项式  $-\frac{1}{2}ab^2c$ ，它的指数为  $1+2+1=4$ ，是四次单项式。
3. 单项式的系数：单项式中的数字因数叫做单项式的系数。
4. 多项式：由几个单项式的和组成的代数式叫做多项式。
5. 多项式的项：其中每个单项式都是该多项式的一个项。多项式中的各项包括它前面的符号。多项式中不含字母的项叫做常数项。
6. 的次数：多项式里，次数最高项的次数就是这个多项式的次数。
7. 多式的降（升）幂排列：按照同一个字母的指数从大到小（或从小到大）的顺序排列。
8. 整式：单项式和多项式统称整式

例 8. ★代数式  $\frac{1}{2}x^2y$ ， $-\frac{1}{5}b^2$ ， $\frac{x}{3x}$ ， $5x^2 - \frac{1}{6}y^2$ ， $\frac{1}{a}(m+n)$ ， $\frac{x+3}{3}$ ， $0$ ， $y^2+6y+9$  中，整式共有（     ）个

- A、5                                  B、6                                  C、7                                  D、8

例 9. ★找出下列各代数式中的单项式，并写出各单项式的系数和次数。

$$\frac{2}{3}xy^2, -a, \frac{a}{bc}, \frac{mn}{2}+3, 2^5t^7, -3a^2b^3c, 2, -\frac{x}{\pi}.$$

例 10. ★写出下列多项式的次数及最高次项的系数。

(1)  $\frac{3x^3 - 6x^2 + 9}{4}$ ;                                  (2)  $x + y - \frac{4\pi xy}{3} - 1.$

例 11. ★★解答题:

(1) 把多项式  $3a - 5a^3 + 6a^2 - 2$  按  $a$  的降幂排列;

(2) 把多项式  $4x^2y - 5x^3 - 3xy^2 + y^3$  按  $y$  的升幂排列;

(3) 求多项式  $3x^2 - 2xy - 5y^2 + 2$  的各项系数之和

例 12. ★多项式  $6x^{n+2} - x^{2-n} + 2$  是三次三项式, 求代数式  $n^2 - 2n + 1$  的值.

例 13. ★★多项式  $-\frac{1}{5}x^2y^{m+1} + xy^2 - 3x^3 - 6$  是六次四项式, 单项式  $2x^{3n}y^{5-m}z$  的次数与这个多项式次数相同, 求  $m, n$  的值.

例 14. ★★请各写出一个符合条件的整式:

- (1) 系数是  $-1$ , 次数是  $3$  的单项式;
- (2) 系数是  $3$ , 次数是  $1$  的单项式;
- (3) 常数项为  $-2$  的二次三项式.

例 15. ★★★现有两个多项式, 它们同时满足下列条件:

- (1) 多项式中均只含有字母  $x$ ;
- (2) 每个多项式中各项系数的绝对值均为  $2$ ;
- (3) 这两个多项式的和是一个  $5$  次多项式, 这两个多项式的差是一个一次单项式.

问: 这两个多项式分别是多少?



### 第三讲 整式的加减

#### 【知识点梳理 1】合并同类项

##### 1、同类项的概念：

所含的字母相同，且相同字母的指数也相同的单项式叫做同类项。

##### 2、合并同类项：

合并同类项的法则：在合并同类项时，把同类项的系数相加的结果作为合并后的系数，字母和字母的指数不变。

例 1. ★下列各组单项式中属于同类项的是：

①  $2m^2n$  和  $2a^2b$ ；                      ②  $-\frac{1}{2}x^3y$  和  $yx^3$ ；                      ③  $6xyz$  和  $6xy$ ；

④  $0.2x^2y$  和  $0.2xy^2$ ；                      ⑤  $xy$  和  $-yx$ ；                      ⑥  $-\frac{1}{2}$  和  $2$ 。

例 2. 合并下列同类项：

(1)  $x^2 - x + 5 - 2x + \frac{1}{2} - 3x^2$ ；

(2)  $m^3 - n^3 - 3m^3 + 2n^3$ ；

(3)  $-7m - \frac{1}{7}m + 3a^2 - 2a + \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}a$ 。

例 3. ★★单项式  $-\frac{1}{3}x^{a+b}y^{a-3b}$  与  $3x^2y$  是同类项，求  $a-b$  的值。

例 4. ★★已知  $x < -4$ ，化简：  $2|-x| + 3|x+4| - |x-4|$ 。

例 5. ★★已知:  $|x|=3$ ,  $|y|=1$ . 求  $3x^2 - [2xy^2 - 2(3x^2y + xy^2)]$  的值.

例 6. ★★多项式  $5x^2 - 2mxy - 3y^2 + 4xy - 3x + 1$  中不含  $xy$  项,

求  $-m^3 + 2m^2 - m + 1 - m^3 - 2m^2 + m - 4$  的值.

### 【知识点梳理 2】去/添括号法则

#### 1. 去括号法则

括号前面是“+”号, 去掉“+”号和括号, 括号里的各项不变号;

括号前面是“-”号, 去掉“-”号和括号, 括号里的各项都变号.

括号前有系数, 应先进行乘法分配律, 再去括号.

去括号法则可简记为: “负”变“正”不变.

#### 2. 添括号法则

先去括号, 再合并同类项:

例 7. ★

$$(1) (x^3 - 1) - (2x^3 + 1);$$

$$(2) 3(x^2 - 2) + 2(1 - 2x^2);$$

$$(3) 2(2b - 3a) + 3(2a - 3b);$$

$$(4) (3x^2 - xy - 2y^2) - 2(x^2 + xy - 2y^2).$$

例 8. ★计算:

(1) 求整式  $2a + 3b - 1$  与  $3a - 2b + 2$  的和.

(2) 求代数式  $-x^2 - 4x - 2$  与  $x^3 + 5x^2 + 3x - 4$  的和与差.

(3) 求整式  $x^2 - 5x - 3$  与  $-2x^2 + 3x - 2$  的差.

例 9. ★化简:  $\frac{1}{2}x^2 - (x^2 - 2x + 3) + (x - 2) - \left(-\frac{2}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)$ .

例 10. ★★代数式  $\left(2x^2 + ax - \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}x - 2y + 1 - bx^2\right)$  的值与字母  $x$  取值无关,  
求  $2a - 5b$  的值.

例 11. ★★一个多项式  $A$  减去多项式  $2x^2 + 5x - 3$ , 马虎同学将减号抄成了加号, 运算结果是  $4x^3 - 5x^2 + 7$ , 求多项式  $A$ .

例 12. ★★已知关于  $a$  的多项式  $-3a^3 - 2ma^2 + 5a + 3$ ,  $8a^2 - 3a + 5$  相加后, 不含二次项,  
求  $m$  的值.

例 13. ★★★(1) 如果  $A$  是三次多项式,  $B$  是四次多项式, 那么  $A+B$  和  $A-B$  各是几次多项式?

(2) 如果  $A$  是  $m$  次多项式,  $B$  是  $n$  次多项式, 且  $m < n$ , 则  $A+B$  和  $A-B$  各是几次多项式?

(3) 如果  $A$  是  $m$  次多项式,  $B$  是  $n$  次多项式,  $m, n$  为正整数, 那么  $A+B$  和  $A-B$  各是几次多项式?

## 第四讲 同底数幂的乘法

### 【知识点梳理 1】同底数幂的乘法

1、幂的运算概念：求  $n$  个相同因数的积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂。在  $a^n$  中， $a$  叫做底数， $n$  叫做指数。

含义： $a^n$  中， $a$  为底数， $n$  为指数，即表示  $a$  的个数， $a^n$  表示有  $n$  个  $a$  连续相乘..

特别注意负数及分数的乘方，应把底数加上括号。

### 3、同底数幂相乘

同底数的幂相乘，底数不变，指数相加。用式子表示为：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 都是正整数}).$$

例 1. ★下列各式正确吗？不正确的请加以改正。

$$(1) -x^3 \cdot (-x)^4 = (-x)^7; \quad (2) -x^2(-x)^4 = (-x)^6;$$

$$(3) (-a)^m (-a)^{m+1} = a^{2m+1}; \quad (4) b^5 \cdot b^5 = 2b^5;$$

$$(5) b^4 + b^6 = b^{10}; \quad (6) x^5 \cdot x^5 = 2x^{10};$$

$$(7) x^5 \cdot x^5 = x^{25}; \quad (8) c \cdot c^3 = c^3.$$

例 2. ★计算下列各式，结果用幂的形式表示：

$$(1) (-2)^5 \times (-2)^6 \times (-2)^7; \quad (2) a \cdot a^2 \cdot a^3;$$

$$(3) (a+b)^2 \cdot (a+b)^4; \quad (4) (x-y)^2 \cdot (x-y)^3 \cdot (x-y)^5.$$

例 3. ★计算下列各式，结果用幂的形式表示。

$$(1) x^3 \cdot x^4 + x \cdot x^3 \cdot x^3 + (-x) \cdot (-x)^3 \cdot x^3;$$

$$(2) (-a)^3 (-a)^2 (-a) + (-a^4)(-a)^2;$$

$$(3) a^{m-1} \cdot a^{n+2} + a^{m+2} \cdot a^{n-1} + a^m \cdot a^{n+1}.$$

例 4. ★★计算下列各式，结果用幂的形式表示.

(1)  $-(-a)^3 \cdot (-a^2)(-a)^3$ ;

(2)  $(x-y)^2(y-x)^3$ ;

(3)  $(x-2y)^2(x-2y)^{m-1}(x-2y)^{m+2}$ .

例 5. ★★求值:

(1) 已知:  $x^{m+2n} \cdot x^{n-m} = x^9$ , 求  $(-5)^n + 9$  的值.

(2) 已知:  $(-3)^{x+4} = 3^2$ , 求  $x$  的值.

例 6. ★★★若  $2^m \cdot 2^n = 16$ , 求  $4^{m+n} \cdot 8^{m+n}$  的值.

### 【知识点梳理 2】幂的乘方

1、幂的乘方定义: 幂的乘方是指几个相同的幂相乘.

2、幂的乘方法则: 幂的乘方, 底数不变, 指数相乘. 即  $(a^m)^n = a^{mn}$  ( $m$ 、 $n$  都是正整数)

例 7、★计算下列各式, 结果用幂的形式表示.

(1)  $-(a^2)^4$ ;

(2)  $(-a^2)^4$ ;

(3)  $(a^{2n})^n$ ;

(4)  $(2^3)^8$ ;

(5)  $[(-2)^3]^4$ ;

(6)  $-(b^3)^3$ ;

(7)  $(-x^3)^4$

8)  $[(x+y)^2]^3[(x+y)^3]$ .

例 8. ★当正整数  $n$  分别满足什么条件时,  $(-a)^n = a^n, (-a)^n = -a^n$ ?

例 9. ★★★ 已知:  $a^n = 2$  ( $n$  为正整数), 求  $(a^{2n})^2 - (a^3)^{2n}$  的值.

例 10★★ 计算

$$(1) 2(a^{n+1})^2 + a^n a^{n+2}; \quad (2) x^2(x^2)^8 - 2[(x^2)^3]^3 + x^6(x^3)^4.$$

例 11. ★★★ 计算:

$$(1) [(a-b)^n]^2 [(b-a)^{n-1}]^2 (a-b)^{2n+1};$$

$$(2) [(a-b)^2]^3 - [(b-a)^3]^2.$$

例 12. ★★★ 已知  $a^m = 2$ ,  $a^n = 3$ , 求  $a^{2m+3n}$  的值.

例 13. ★★★ 已知  $a \cdot a^x \cdot a^{x+2y} \cdot b^{m+6} = a^7 b^{3m}$  ( $x$ 、 $y$ 、 $m$  都是正整数), 且  $y$  不大于 3, 求

$x + y - 2m$  的值

## 第五讲 幂的乘方

### 【知识点梳理】

幂的乘方, 底数不变, 指数相乘.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 都是正整数})$$

### 【例题分析】

#### ★一、填空题

1. 计算:  $(a^3)^4$  表示\_\_\_\_\_.

2. 计算:  $(x^4)^3 =$ \_\_\_\_\_.

3. 计算:  $(y^3)^2 + (y^2)^3 =$ \_\_\_\_\_.

4. 计算:  $(-a^3)^2 \cdot (-a^2)^3 =$ \_\_\_\_\_.

5.  $(2^3)^2 = 4^{(\quad)}$ . (在括号内填数)

#### ★二、选择题

6. 计算下列各式, 结果是  $x^8$  的是 ( )

A.  $x^2 \cdot x^4$ ;                      B.  $(x^2)^6$ ;                      C.  $x^4 + x^4$ ;                      D.  $x^4 \cdot x^4$ .

7. 下列各式中计算正确的是 ( )

A.  $(x^4)^3 = x^7$ ;                      B.  $[(-a)^2]^5 = -a^{10}$ ;  
C.  $(a^m)^2 = (a^2)^m = a^{2m}$ ;                      D.  $(-a^2)^3 = (-a^3)^2 = -a^6$ .

8. 计算  $(-x^2)^3$  的结果是 ( )

A.  $-x^5$ ;                      B.  $x^5$ ;                      C.  $-x^6$ ;                      D.  $x^6$ .

9. 下列四个算式中:

①  $(a^3)^3 = a^{3+3} = a^6$ ; ②  $[(b^2)^2]^2 = b^{2 \times 2 \times 2} = b^8$ ; ③  $[(-x)^3]^4 = (-x)^{12} = x^{12}$ ;  
④  $(-y^2)^5 = y^{10}$ , 正确的算式有 ( )  
A. 0 个;                      B. 1 个;                      C. 2 个;                      D. 3 个.

10. 下列各式: ①  $-a^5 \cdot [(-a)^2]^3$ ; ②  $a^4 \cdot (-a)^3$ ; ③  $(-a^2)^3 \cdot (a^3)^2$ ; ④  $-[-a^4]^3$ , 计算

结果为  $-a^{12}$  的有 ( )

A. ①和③;                      B. ①和②;                      C. ②和③;                      D. ③和④.

#### ★三、解答题

11. 计算: (1)  $(a^m)^3 \cdot a^n$ ;                      (2)  $[(-1)^3 \cdot a^2]^4$ ;                      (3)  $a^4 \cdot (a^2)^3$ ;                      (4)  $(a^3)^4 \cdot (a^2)^5$ .

★12.计算:

(1)  $(a^3)^4 + a^8 a^4$ ;

(2)  $2(a^5)^2 \cdot (a^2)^2 - (a^2)^4 \cdot (a^3)^2$

(3)  $(-a^3)^4 \cdot (-a^4)^3$ ;

(4)  $(-a^4)^5 - (-a^2 \cdot a^3)^4 + (-a^2)^{10} - a \cdot (-a^2)^5 \cdot (-a^3)^3$ .

**【能力提升】**

★13.在下列各式的括号中填入适当的代数式,使等式成立:

(1)  $a^6 = (\underline{\hspace{2cm}})^2$ ; (2)  $(a^5)^2 \cdot (\underline{\hspace{2cm}})^2 = (a^2)^4 \cdot (a^3)^2$ .

★★14.计算:比较  $7^{50}$  与  $48^{25}$  的大小.

★★15.已知:  $2x + 3y - 4 = 0$ , 求  $4^x \cdot 8^y$  的值.

★★16.若  $10^x = 5$ ,  $10^y = 3$ , 求  $10^{2x+3y}$  的值.

★★17.已知:  $9^{n+1} - 3^{2n} = 72$ , 求  $n$  的值.

★★★18.若  $a = 2^{55}$ ,  $b = 3^{44}$ ,  $c = 4^{33}$ , 比较  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小.



## 第六讲 积的乘方

### 【知识点梳理】

积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘.

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (\text{是正整数})$$

### 【例题分析】

★一、填空题: 1.  $(-\frac{1}{3}ab^2c)^2 = \underline{\hspace{2cm}}, (a^2)^n \cdot a^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

2.  $[(p+q)^3]^5 \cdot [(p+q)^7]^2 = \underline{\hspace{2cm}}, (\quad)^n = 4^n a^{2n} b^{3n}.$  3.  $(a^3)^{(\quad)} \cdot a^2 = a^{14}.$

4.  $(3a^2)^3 + (a^2)^2 \cdot a^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$  5.  $(x^2 y^n)^2 \cdot (xy)^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6.  $(\frac{1}{3})^{100} \times (-3)^{100} = \underline{\hspace{2cm}}, \{-[-(-1)^2]^{2004}\}^{2003} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 若  $x^n = 2, y^n = 3$ , 则  $(xy)^n = \underline{\hspace{2cm}}, (x^2 y^3)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$  8. 若  $128^4 \times 8^3 = 2^n$ , 则  $n = \underline{\hspace{2cm}}.$

★二、选择题: 9. 若  $a$  为有理数, 则  $(a^3)^2$  的值为( ) A. 有理数      B. 正数      C. 零或负数  
D. 正数或零

10. 若  $(ab^3)^3 < 0$ , 则  $a$  与  $b$  的关系是( ) A. 异号      B. 同号      C. 都不为零      D. 关系不确定

11. 计算  $(-p)^8 \cdot (-p^2)^3 \cdot [(-p)^3]^2$  的结果是( ) A.  $-p^{20}$       B.  $p^{20}$       C.  $-p^{18}$       D.  $p^{18}$

12.  $4^x \times 4^y = (\quad)$  A.  $16^{xy}$       B.  $4^{xy}$       C.  $16^{x+y}$       D.  $2^{2(x+y)}$

13. 下列命题中, 正确的有( )

①  $(x^{m+n})^3 = x^{m+n+3}$ , ②  $m$  为正奇数时, 一定有等式  $(-4)^m = -4^m$  成立,

③ 等式  $(-2)^m = 2^m$ , 无论  $m$  为何值时都不成立

④ 三个等式:  $(-a^2)^3 = a^6, (-a^3)^2 = a^6, [-(-a^2)]^3 = a^6$  都不成立( )

A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

14. 已知  $|x| = 1, |y| = \frac{1}{2}$ , 则  $(x^{20})^3 - x^3 y^2$  的值等于( )

A.  $-\frac{3}{4}$  或  $-\frac{5}{4}$       B.  $\frac{3}{4}$  或  $\frac{5}{4}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $-\frac{5}{4}$

★★15. 已知  $a = 2^{55}, b = 3^{44}, c = 4^{33}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是( )

A.  $b > c > a$       B.  $a > b > c$       C.  $c > a > b$       D.  $a < b < c$

16. 计算  $0.25^6 \times (-32)^2$  等于( ) A.  $-\frac{1}{4}$  B.  $\frac{1}{4}$  C. 1 D. -1

★三、解答题:17. 计算 (1)  $(x^4)^2 + (x^2)^4 - x(x^2)^2 \cdot x^3 - (-x)^3 \cdot (-x^2)^2 \cdot (-x)$  ;

(2)  $(-\frac{1}{4}a^{3-n}b^{m-1})^2 \cdot (4a^{3-n}b^{+1})^2$ ; (3)  $2^{2m-1} \times 16 \times 8^{m-1} + (-4^m) \times 8^m$  (m 为正整数).

**【能力提升】**

★★18. 已知  $10^a = 5, 10^b = 6$ , 求(1)  $10^{2a} + 10^{3b}$  的值;(2)  $10^{2a+3b}$  的值

★★★19. 比较  $2^{100}$  与  $3^{75}$  的大小

★★★20. 已知  $a^{3m} = 3, b^{3n} = 2$ , 求  $(a^{2m})^3 + (b^n)^3 - a^{2m} \cdot b^n \cdot a^{4m} \cdot b^{2n}$  的值

★★★21. 若  $a=-3, b=25$ , 则  $a^{1999} + b^{1999}$  的末位数是多少?

## 第八讲 整式的乘法

### 【知识点梳理】

(1)、单项式与单项式相乘的法则：

单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘的积作为积的因式，其余字母连同它的指数不变，也作为积的因式。如： $6a^2 \cdot 4ab^3 = (6 \times 4)(a^2 \cdot a)b^3 = 24a^3b^3$

(2)、单项式与多项式相乘的法则：

单项式与多项式相乘，用单项式乘以多项式的每一项，再把所得的积相加。

$$\text{即： } m(a+b+c) = ma + mb + mc$$

(3) 多项式乘以多项式：

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加。

**注意：**多项式乘以多项式的结果能合并的一定要合并同类项。

### 【例题分析】

#### ★一、选择题

1. 计算  $(-3x) \cdot (2x^2 - 5x - 1)$  的结果是 ( )  
A.  $-6x^2 - 15x^2 - 3x$       B.  $-6x^3 + 15x^2 + 3x$   
C.  $-6x^3 + 15x^2$           D.  $-6x^3 + 15x^2 - 1$
2. 下列各题计算正确的是 ( )  
A.  $(ab-1)(-4ab^2) = -4a^2b^3 - 4ab^2$       B.  $(3x^2 + xy - y^2) \cdot 3x^2 = 9x^4 + 3x^3y - y^2$   
C.  $(-3a)(a^2 - 2a + 1) = -3a^3 + 6a^2$       D.  $(-2x)(3x^2 - 4x - 2) = -6x^3 + 8x^2 + 4x$
3. 如果一个三角形的底边长为  $2x^2y + xy - y^2$ ，高为  $6xy$ ，则这个三角形的面积是 ( )  
A.  $6x^3y^2 + 3x^2y^2 - 3xy^3$       B.  $6x^3y^2 + 3xy - 3xy^3$   
C.  $6x^3y^2 + 3x^2y^2 - y^2$       D.  $6x^3y + 3x^2y^2$
4. 计算  $x(y-z) - y(z-x) + z(x-y)$ ，结果正确的是 ( )  
A.  $2xy - 2yz$       B.  $-2yz$       C.  $xy - 2yz$       D.  $2xy - xz$

#### ★二、填空题

5. 方程  $2x(x-1) = 12 + x(2x-5)$  的解是\_\_\_\_\_.
6. 计算： $-2ab \cdot (a^2b + 3ab^2 - 1) =$ \_\_\_\_\_.
7. 已知  $a+2b=0$ ，则式子  $a^3 + 2ab(a+b) + 4b^3$  的值是\_\_\_\_\_.

#### ★三、解答题

8. 计算：

$$\textcircled{1} \left( \frac{1}{2}x^2y - 2xy + y^2 \right) \cdot (-4xy) \qquad \textcircled{2} -ab^2 \cdot (3a^2b - abc - 1)$$

③  $(3a^{n+2}b-2a^nb^{n-1}+3b^n) \cdot 5a^nb^{n+3}$  ( $n$  为正整数,  $n>1$ )

④  $-4x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}xy-y^2\right) - 3x \cdot (xy^2-2x^2y)$

9. 化简求值:  $-ab \cdot (a^2b^5-ab^3-b)$ , 其中  $ab^2=-2$ 。

**【能力提升】**

**★★★四、探究题**

10. 请先阅读下列解题过程, 再仿做下面的题.

已知  $x^2+x-1=0$ , 求  $x^3+2x^2+3$  的值.

解:  $x^3+2x^2+3=x^3+x^2-x+x^2+x+3$

$$=x(x^2+x-1)+x^2+x-1+4$$

$$=0+0+4=4$$

如果  $1+x+x^2+x^3=0$ , 求  $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$  的值.

## 第九讲 平方差公式

### 【知识点梳理】

#### (一) 平方差公式

1. 平方差公式是由多项式乘法直接计算得出的： $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

2. 这一公式的结构特征：

(1) 左边是两个二项式相乘，这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数

(2) 右边是乘式中两项的平方差，即相同项的平方与相反项的平方差。

(3) 公式中的字母可以表示具体的数（正数和负数），也可以表示单项式或多项式等代数式。

只要符合公式的结构特征，就可运用这一公式。例如

$$\begin{array}{ccccccc} (100+2)(100-2) & = & 100^2 & - & 2^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (a+b)(a-b) & = & a^2 & - & b^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (3m+2n)(3m-2n) & = & (3m)^2 & - & (2n)^2 \end{array}$$

### 【例题分析】

#### 1. 难度★

现有下列算式：

(1)  $(x+y)(x-y)$ ；(2)  $(x+y)(y-x)$ ；(3)  $(-x-y)(x+y)$ ；(4)  $(-x+y)(x-y)$ 。

其中满足平方差公式的有（ ）

(A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

#### 2. 填空

(1)  $(x+1)(x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$  ；

(2)  $(a+\frac{1}{2})(\underline{\hspace{2cm}}) = a^2 - \frac{1}{4}$  ；

(3)  $(2a-1)(\underline{\hspace{2cm}}) = 4a^2 - 1$  ；

(4)  $(x-y)(\underline{\hspace{2cm}}) = y^2 - x^2$  ；

(5)  $(ab + \underline{\hspace{2cm}})(ab - \underline{\hspace{2cm}}) = a^2b^2 - \frac{1}{9}$ 。

#### 3. 直接写出结果

(1)  $(3a-2)(3a+2) = \underline{\hspace{2cm}}$  ；

(2)  $(2-\frac{1}{2}x)(2+\frac{1}{2}x) = \underline{\hspace{2cm}}$  ；

(3)  $(0.8x+y)(y-0.8x) = \underline{\hspace{2cm}}$  ；

(4)  $(-3+2a)(-3-2a) = \underline{\hspace{2cm}}$  ；

(5)  $(2a+3b)(3a-2b) = \underline{\hspace{2cm}}$  ；

(6)  $(x-y)(y-x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 难度★★

1. 下列各式计算中，结果正确的是 ( ).

A.  $(x-2)(2+x) = x^2 - 2$       B.  $(x+2)(3x-2) = 3x^2 - 4$

C.  $(ab-c)(ab+c) = a^2b^2 - c^2$       D.  $(-x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

2. 如果  $x+y=5, x-y=3$ ，则  $2x^2-2y^2$  的结果是 ( ).

- A. 30      B. 16      C. 8      D. 25

3. 计算:

(1)  $(2a^3 + b^2)(2a^3 - b^2)$  ;

(2)  $(x - \frac{1}{2}y)(\frac{1}{2}y + x)$  ;

(3)  $(2xy - 1)(-1 - 2xy)$  ;

(4)  $(-ab^2 + m^2n^3)(-ab^2 - m^2n^3)$  ;

$$(5) (3m+2n)(3m-2n)(9m^2+4n^2)$$

$$(6) (-ab^2+x^2y^3)(a^2b^4+x^4y^6)(-ab^2-x^2y^3).$$

3. ★★★

运用平方差公式计算

$$(1) ab\left(\frac{1}{3}ab-b^2\right)\left(\frac{1}{3}a^2+ab\right);$$

$$(2) 2(3+1)(3^2+1)(3^4+1).$$

## 第十讲 完全平方公式

### 【知识点梳理】

1、完全平方公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  注意不要漏掉  $2ab$  项

这两个公式的结构特征是：左边是两个相同的二项式相乘，右边是三项式，是左边两项的平方和，加上（这两项相加时）或减去（这两项相减时）这两项乘积的 2 倍；公式中的字母可以表示具体的数（正数或负数），也可以表示单项式或多项式等代数式。

**记忆口诀：首平方，尾平方，乘积 2 倍在中央，前加后加，前减后减。**

2、完全平方公式中常见的公式变形：

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad a^2 + b^2 = (a+b)^2 - \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + \underline{\hspace{2cm}}$$

### 【例题分析】

#### ★1、化简

(1)  $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ .

(2)  $(a+1)(a-1)(a^2-1)$ .

(3)  $(x+3)^2 + 2(x-y)(x+y) + (x-3)^2$ .

(4)  $\left[ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \right] \left(2a^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ .

#### ★★2、计算：

(1)  $(a+2b-3)(a+2b+3)$ .

(2)  $(x^2+x+3)(x^2-x-3)$ .



$$(3) \quad (x+2y+3)^2 - (x-2y+3)(x-2y-3)$$

★★★ 3、小丽是个数学迷，老师上课时教的完全平方公式，只是对二项式进行平方，她想知道对三项式、四项式、五项式等进行平方有何规律，通过计算她发现下述三个等式：

$$(1) \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(2) \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$(3) \quad (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 \\ + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc \\ + 2bd + 2cd.$$

1. 请你帮小丽一起算一算五项式：

$$(a+b+c+d+e)^2 \text{ 是什么?}$$

2. 请你仔细观察上述四个等式，归纳一下展开式中的次数、项数、系数有些什么特征.

★★★ 探究与活动 项数探讨

几项式	项数	项数	项数
(2)	3	3	
(3)	6	3+3	
(4)	10	3+3+4	
(5)	15	3+3+4+5	
(6)	21	3+3+4+5+6	
(n)	?	3+3+4+5+6+...+n	1+2+3+4+...+n =n(n+1)/2

## 第十一讲 整式复习

一、填空题（每题3分，共36分）

1. 计算： $x^4 \cdot x^5 =$  .

2. 计算： $(a^2)^3 =$ \_\_\_\_\_ .

3. 计算： $(2x^3y)^2 =$  .

4. 如果 $a^2 \cdot a^n = a^6$ ，那么 $n =$ \_\_\_\_\_ .

5. 计算： $(-x)^{2016} - x^{2016} =$ \_\_\_\_\_ .

6. 计算： $2x^3 \cdot \frac{2}{7}xy^2 =$  .

7. 计算： $2x(x^2 - x - 1) =$  .

8. 计算： $(x+3)(x-1) =$ \_\_\_\_\_ .

9. 计算： $(2a-3)(2a+3) =$ \_\_\_\_\_ .

10. 计算： $(x - \frac{1}{2}y)^2 =$ \_\_\_\_\_ .

11. 计算，结果用幂的形式表示： $(a+1)^3 \cdot [(a+1)^3]^4 =$ \_\_\_\_\_ .

12. 若 $(x-y)^2 - M = x^2 + y^2$ ，则 $M =$  .

二、选择题（每题3分，共12分）

13. 下列计算中，正确的是.....（ ）

(A)  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$  ;                      (B)  $(a+2b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ;

(C)  $(a-2b)^2 = a^2 - 2ab + 4b^2$  ;              (D)  $(2a-b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$  .

14. 下列多项式中可以用平方差公式计算的是.....（ ）

(A)  $(-3b-2a)(2a+3b)$  ;                      (B)  $(2a-3b)(2b+3a)$  ;

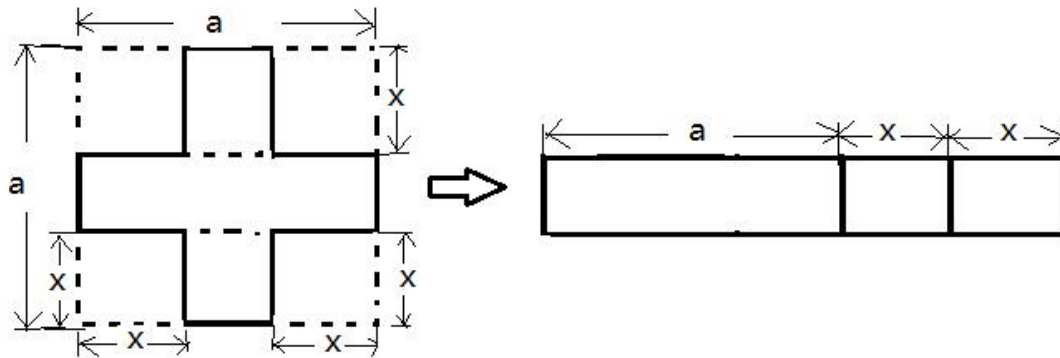
(C)  $(2a-3b)(-2a-3b)$  ;                      (D)  $(2a-3b)(-2a+3b)$  .

15. 下列多项式中可以用完全平方公式计算的是.....（ ）

(A)  $(a-2b)(2a-b)$  ;                      (B)  $(a-2b)(-2b-a)$  ;

- (C)  $(-a-2b)(-2b+a)$ ;                      (D)  $(a-2b)(2b-a)$ .

16. 根据下图“十”字形的割补，你能得到哪个等式..... (        )



- (A)  $a^2 - x^2 = x(a+2x)$ ;                      (B)  $a^2 - 4x^2 = 2x(a+2x)$ ;  
 (C)  $a^2 - x^2 = (a-2x)(a+2x)$ ;                      (D)  $a^2 - 4x^2 = (a-2x)(a+2x)$ .

三、计算题（每题 6 分，共 36 分）

17.  $x^2 \cdot x^3 + (-x)^5 + (x^2)^3$ ;                      18.  $3ab \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2b\right) + \frac{3}{4}a \cdot 2a^2b^2$ ;

19.  $(a-3)^2 - (a+2)(a-2)$ ;                      20.  $(a-2b-c)(a-2b+c)$ ;

21.  $(-8)^{2016} \times \left(-\frac{1}{8}\right)^{2015}$ ;                      22. 简便计算： $101 \times 99 + 101^2 + 99^2$ ;

四、解答题（每题 8 分，共 16 分）

23. 化简求值： $(3x-2)(2+3x)-x(x-3)^2+x^3$ ，其中  $x=\frac{1}{2}$ ；

24. 观察：

$$1^2+1^2\times 2^2+2^2=9=3^2$$

$$2^2+2^2\times 3^2+3^2=49=7^2$$

$$3^2+3^2\times 4^2+4^2=169=13^2$$

$$4^2+4^2\times 5^2+5^2=\left(\quad\right)=\left(\quad\right)^2$$

(1) 在括号里填上适当的数；

(2) 猜想： $n^2+n^2\times(n+1)^2+(n+1)^2=$ \_\_\_\_\_；

(3) 利用上述猜想，计算： $100^2+100^2\times 101^2+101^2$ （结果可以用幂的形式表示）.

## 第十二讲

### 【知识点梳理】

因式分解的概念：

(1) 把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式。

(2) 因式分解和整式乘法正好互为逆运算。可通过下图加以理解：

$$\text{多项式(和差形式)} \xrightleftharpoons[\text{整式乘法}]{\text{因式分解}} \text{整式的积(积的形式)}$$

即它们互为相反的恒等变形，所以说，因式分解是否正确可以用整式的乘法来进行检验。

3. 提取公因式法：

(1) 如果一个多项式的各项含有公因式，那么可以把该公因式提取出来，作为多项式的一个因式，提出公因式后的式子放在括号里，作为另一个因式，这种分解因式的方法叫做提取公因式法。

(2) 提取公因式的一般步骤：

利用提取公因式法进行因式分解的一般步骤可概括为“一找、二提、三去除”。“一找”就是第一步要正确找出多项式中各项的公因式；“二提”就是第二步将所找出的公因式提出来；“三去除”就是第三步当提出公因式后，此时可直接观察提出公因式后剩下的另一个因式。

注意点：

(1) 如果多项式的首项系数是负数时，一般应先提出“-”号，使括号内的第一项系数是正数，然后再对括号内的多项式进行提取公因式。如：

$$-12a^2b - 8ab^2 = -(12a^2b + 8ab^2) = -4ab(3a + 2b)$$

(2) 利用提取公因式法分解因式时，一定要“提干净”。也就是说当一个多项式提取公因式后，剩下的另一个因式中应该已经没有可以提取的公因式了；若发现还有公因式必须要再次提取，否则因式分解就不彻底，没有完成。

(3) 注意避免出现分解因式的漏项问题，一般提取公因式后，括号里的多项式项数应与原多项式的项数一致。特别要注意，有时公因式就是多项式中的某一项本身，不要忘记提取公因式后还有“1”这个因式，不要遗漏。

(4) 多项式的公因式可以是数字、字母，也可以是单项式，还可以是多项式，当把多项式作为公因式提出来时，要特别注意统一字母的排列顺序，要设法结合相关知识进行转化，使之成为完全相同的因式时再提取公因式，否则容易出现符号上的错误。

### 【例题分析】

★1、下列各等式中，从左到右的变形是因式分解的是 ( )

(A)  $a(a+b) = a^2 + ab$ ;

(B)  $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ;

(C)  $2a^2 - 3ab = a(2a - 3b)$ ;

(D)  $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ .

★2、填空:

(1)  $(b-a) = -(\underline{\quad})$ ;

(2)  $(2y-x+3) = -(\underline{\quad})$ ;

(3)  $(y-x)^3 = (\underline{\quad})(x-y)^3$ ;

(4)  $5(2b-a)^2 = \underline{\quad}(a-2b)^2$ ;

(5)  $(a-b)(x-y+3) = (b-a)(\underline{\quad})$ .

★3、根据条件填空:

(1) 因为  $3xy(2x-y) = 6x^2y - 3xy^2$ , 所以因式分解  $6x^2y - 3xy^2 = \underline{\quad}$

(2) 因为  $(a^2 + 2a + 3)a = a^3 + 2a^2 + 3a$ , 所以因式分解  $a^3 + 2a^2 + 3a = \underline{\quad}$

(3) 因为  $3a^2(a^2 + b^2) = 3a^4 + 3a^2b^2$ , 所以因式分解  $3a^4 + 3a^2b^2 = \underline{\quad}$

(4) 因为  $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$ , 所以因式分解  $x^2 - 9 = \underline{\quad}$

(5) 因为  $(2a+b)(a+2b) = 2a^2 + 5ab + 2b^2$ , 所以因式分解  $2a^2 + 5ab + 2b^2 = \underline{\quad}$

★4、提取公因式:

(1)  $6a^3 - 3a$ ;

(2)  $24x - 18x^3 + 12x^4$ ;

(3)  $-7x^2y^2 + 21x^3y^2$ ;

(4)  $9m^3n^4 - 27m^4n^3 + 81m^2n^2$

★5、分解因式:

(1)  $-25a^2 + 50a$ ;

(2)  $3x^3 - 9x^2 + 3x$ ;

$$(3) 18x^3y^2 + 12x^2y^2 - 2x^3y;$$

$$(4) -2nm + 4n^2m - 6nm^3;$$

★★

一、分解因式:

$$(1) -45a^4b^2c^3 + 18a^3b^2c^2 + 90a^2b^2c^2;$$

$$(2) 16x^3y^2z^3 + 48x^4y^3z^2 - 96x^2y^2z^4$$

二.  $4 \times 3^{2012} - 3^{2009}$  能否被107整除? 为什么?

★把下列各式分解因式:

$$(1) (x+y)^2 - (x+y)^3;$$

$$(2) (x-y)^2 - (x-y)^3;$$

$$(3) (x-y)^2 - (y-x)^3;$$

$$(4) 2(x-y) - 3(y-x)^2;$$

$$(5) 4ab(a+b)^2 - 6a^2b(a+b);$$

$$(6) (x+y)^2(x-y) + (x+y)(x-y)^2$$

$$(7) \quad 2a(a-3)^2 - 6a^2(3-a) + 8a(a-3)$$

$$(8) \quad 24xy^2z^2(x+y-z) - 32xyz(z-x-y)^2 + 8xyz^3(z-x-y)$$

★★★

分解因式:  $(a+x)^{n+1}(b+x)^{n-1} - (a+x)^n(b+x)^n$



### 第十三讲: 阶段测试+因式分解 (一)

【例 1】★判断下列各式从左到右的变形是否是分解因式, 并说明理由.

(1)  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ ;

(2)  $x^3 + x^2 - x = x(x^2 + x)$

(3)  $x^2 + 3x - 2 = x(x+3) - 2$ ;

(4)  $xy + x + y + 1 = (x+1)(y+1)$

【例 2】★分解因式:

(1)  $ad - bd + d$ ;

(2)  $8x^4y^3z^2 - 6x^5y^2$

(3)  $-2m^3 + 6m^2 - 18m$

【例 3】★★因式分解:

(1)  $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$

(2)  $2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$

(3)  $(2x-3y)(3x-2y) + (2y-3x)(2x+3y)$

(4)  $3a^2b^2 - 6a^2b^3 + \frac{27}{4}ab$

【例 4】★★分解因式:

(1)  $a^4 - b^4$

(2)  $49(m+n)^2 - 16(m-n)^2$

(3)  $(a+b+c+d)^2 - (a-b+c-d)^2$

【例 5】★★分解因式:

(1)  $xy^3 - 4xy$ ;

(2)  $a^2(x-y) + b^2(y-x)$

(3)  $4a^2 - 8a + 4$

(4)  $24xy - 9x^2 - 16y^2$

【例 6】★★分解因式:

(1)  $2x^2 - 4x + 2$

(2)  $ax^2 - 4ax + 4a$

(2)  $8a - 4a^2 - 4$

(4)  $(m+5n)^2 - 2(5n+m)(n-3m) + (n-3m)^2$

【例 7】★★★分解因式:

(1)  $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$

(2)  $4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2$

(3)  $a^2 + 4 - 4a$

【例 8】★★若  $9x^2 + k + y^2$  是完全平方式,; 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$

## 第十四讲:因式分解 (二)

### 【知识点梳理】

十字相乘法: 利用十字交叉线来分解系数, 把二次三项式分解因式的方法叫十字相乘法。

形如  $x^2 + px + q$  的二次三项式, 如果常数项  $q$  能分解成两个因数  $a, b$  的积, 并且  $a+b$  恰好等于一次项系数  $p$ , 那么它可分解因式, 即

$$x^2 + px + q = x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)。$$

用十字交叉线表示:

$$\begin{array}{ccc} x & & +a \\ x & & +b \\ \hline ax & + & bx = (a+b)x \end{array}$$

例:  $x^2 + 5x - 6 = (x+6)(x-1)$

完全平方公式可看作: 十字相乘的特殊情况。

方法: 对二次项系数为 1 的二次三项式进行因式分解时, 先把常数项分解成两个整数的积, 再判断这两个整数的和是否等于一次项系数。如果恰有这两个整数的和等于一次项系数, 那么这个二次三项式就可以用十字相乘法分解因式。

### 【例题分析】

【例 1】★因式分解:

(1)  $x^2 - 5x + 6$

(2)  $x^2 - 5x - 6$

(3)  $x^2 - 6x + 5$

(4)  $x^2 - 6xy - 16y^2$

### 【例 2】★★填空题

1.  $x^2 + 3x - 10 = \underline{\hspace{2cm}}$ .
2.  $m^2 - 5m - 6 = (m+a)(m+1)$ ;  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .
3. 若多项式  $x^2 - 8x + m$  可分解为  $(x-2)(x-6)$ , 则  $m$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
4. 若多项式  $x^2 - kx - 12$  可分解为  $(x-2)(x+6)$ , 则  $k$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
5.  $x^2 + \underline{\hspace{1cm}} - 2y^2 = (x-y)(\underline{\hspace{2cm}})$ .

### 【例 3】★选择题

1. 如果  $x^2 - px + q = (x+a)(x+b)$ , 那么  $p$  等于 ( )  
 A.  $ab$                       B.  $a+b$                       C.  $-ab$                       D.  $-(a+b)$
2. 如果  $x^2 + (a+b) \cdot x + 5b = x^2 - x - 30$ , 则  $b$  为 ( )  
 A. 5                              B. -6                              C. -5                              D. 6

3. 多项式  $x^2 - 3x + a$  可分解为  $(x-5)(x-b)$ , 则  $a, b$  的值分别为( )

- A. 10 和 -2      B. -10 和 2      C. 10 和 2      D. -10 和 -2

【例 4】★★★分解因式:

(1)  $x+12-x^2$       (2)  $-6x^2+12-x$       (3)  $2m^2-15m+22$

【例 5】★★因式分解:

(1)  $x^4+6x^2+8$       (2)  $x^2-3xy+2y^2$       (3)  $x^4-3x^3-28x^2$

【例 6】★★分解因式:

(1)  $x^2+144y^2-25xy$       (2)  $6x^2-7xy+2y^2$

(3)  $x^4+6x^2-40$

(4)  $x^4-5x^2-36$

【例 7】★★★分解因式:

(1)  $(x+y)^2-4(x+y)-12$       (2)  $12(x+y)^2+11(x+y)(x-y)+2(x-y)^2$

【巩固练习】

1、分解因式： $(x^2 + x)^2 - 17(x^2 + x) + 60$

2、分解因式：(1)  $(x^2 - 3)^2 - 4x^2$       (2)  $(3x^2 + 2x + 1)^2 - (2x^2 + 3x + 3)^2$

3、分解因式：(1)  $4x^4y^2 - 5x^2y^2 - 9y^2$ ；      (2)  $a^6 - 7a^3b^3 - 8b^6$

4、分解因式： $(a - b)x^2 + 2ax + a + b$

## 第十五讲:因式分解(三)

### 【知识点梳理】

分组分解法的原则是分组后可以直接提公因式,或者直接运用公式。使用这种方法的关键在于分组适当,而在分组时,必须有预见性。能预见到下一步能继续分解。而“预见”源于细致的“观察”,分析多项式的特点,恰当的分组是分组分解法的关键。

一般分组方法:

四项:(1)二二分组,每组当中能提公因式,或用平方差、立方和差公式,再在两组之间提取公因式;

(2)一三分组,其中的一项是完全平方式,三项一般也是平方公式,然后用平方差。

### 【例题分析】

#### 【例1】★选择题

1. 将  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$  分解因式,结果是 ( )  
A.  $(x+y)(x-y)^2$  B.  $(x+y)(x-2y)^2$  C.  $(x-y)^3$  D.  $(x+y)(x^2 - 4xy + y^2)$
2. 用分组分解法把  $a^4 - 4a^2 - 4a - 1$  因式分解时,正确的分组方法是 ( )  
A.  $(a^4 - 4a^2) - (4a + 1)$  B.  $(a^4 - 4a^2 - 4a) - 1$   
C.  $(a^4 - 4a) - (4a^2 + 1)$  D.  $a^4 - (4a^2 + 4a + 1)$
3. 多项式  $x^2 - ax - bx + ab$  可分解因式为 ( )  
A.  $(x+a)(x-b)$  B.  $(x-a)(x+b)$  C.  $(x-a)(x-b)$  D.  $(x+a)(x+b)$
4. 多项式  $x^2 + y^2 - 2xy - 1$  可分解因式为 ( )  
A.  $(x+y+1)(x+y-1)$  B.  $(x-y+1)(x-y-1)$   
C.  $(x-y+1)(x+y-1)$  D.  $(x+y+1)(x-y-1)$

#### 【例2】★★分解因式:

(1)  $1 - x^2 + 4xy - 4y^2$ ;

(2)  $c^2 + 2ab - a^2b^2 - 1$

#### 【例3】★★★分解因式:

1.  $a^4(a^4 - 1) - a^4 + 1$

2.  $a^2(2a - b) - 2a + b$

3.  $3(a^2 - b^2) - a + b$

4.  $x^2 - 4a^2 + 8ab - 4b^2$

5.  $ax^2 + bx^2 - b - a + cx^2 - c$

【例 4】★★★★因式分解:

(1)  $a(ab + bc + ca) - abc$

(2)  $x^4 - 2y^4 - 2x^3y + xy^3$

(3)  $abc(a^2 + b^2 + c^2) - a^3bc + 2ab^2c^2$

(4)  $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

【例 5】★★★分解因式: (1)  $(ax + by)^2 + (bx - ay)^2$ ; (2)  $x(x - 1)(x - 2) - 6$

【例 6】★★★★分解因式:  $x^3 - 2x^2 - x + 2 + x^5 - 2x^4$

【例 7】★★★★分解因式： $x^{2n} + x^n - \frac{1}{9}y^{4m} + \frac{1}{4}$

【例 8】★★★★分解因式： $(a+b)^2 + (a+c)^2 - (c+d)^2 - (b+d)^2$

【例 9】★★★★分解因式： $(x-2y)x^3 - (y-2x)y^3$

【例 10】★★★★已知： $(x^2 + y^2) \cdot (x^2 - 2 + y^2) = 15$ ，求  $x^2 + y^2$

【例 11】★★★★已知  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ ，求  $x - y$  的值。

【例 12】★★★★已知  $x^2 + xy - 6y^2 + ax + by - 1 = [(x + 3y) - 1][(x - 2y) + 1]$ ，求 a, b 的值。

【巩固练习】

1、分解因式：(1)  $xy - x - y + 1$

2、分解因式： $7x^2 - 3y + xy - 21x$



3、分解因式： $a^2 - ab - 2a + 2b$

4、分解因式： $4a^2 - 6a - 4ax + 6x$

5、分解因式： $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$

6、分解因式： $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3$

## 第十六讲:因式分解复习

### 一、填空题:

1.  $4a^3 + 8a^2 + 24a = 4a$  (\_\_\_\_\_)

2.  $(a-3)(3-2a) = \underline{\hspace{2cm}}$   $(3-a)(3-2a)$ ;

3.  $a^3b - ab^3 = ab(a-b)(\underline{\hspace{2cm}})$ ;

4.  $(1-a)mn + a - 1 = (\underline{\hspace{2cm}})(mn-1)$ ;

5.  $0.0009x^4 = (\underline{\hspace{2cm}})^2$ ;

6.  $x^2 - (\underline{\hspace{2cm}}) + \frac{1}{16} = (x - \underline{\hspace{2cm}})^2$ ;

7.  $(\underline{\hspace{2cm}})a^2 - 6a + 1 = (\underline{\hspace{2cm}})^2$

8.  $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz = x^2 - (\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$

9.  $2ax - 10ay + 5by - bx = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 若  $m^2 - 3m + 2 = (m+a)(m+b)$ ; 则  $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$

11. 当  $m = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $x^2 + 2(m-3)x + 25$  是完全平方式.

### 二、选择题:

1. 下列各式的因式分解结果中, 正确的是 ( )

A.  $a^2b + 7ab - b = b(a^2 + 7a)$       B.  $3x^2y - 3xy - 6y = 3y(x-2)(x+1)$

C.  $8xyz - 6x^2y^2 = 2xyz(4 - 3xy)$       D.  $-2a^2 + 4ab - 6ac = -2a(a + 2b - 3c)$

2. 多项式  $m(n-2) - m^2(2-n)$  分解因式等于 (      )

A.  $(n-2)(m+m^2)$     B.  $(n-2)(m-m^2)$     C.  $m(n-2)(m+1)$     D.  $m(n-2)(m-1)$

3. 在下列等式中, 属于因式分解的是 (      )

A.  $a(x-y) + b(m+n) = ax + bm - ay + bn$     B.  $a^2 - 2ab + b^2 + 1 = (a-b)^2 + 1$

C.  $-4a^2 + 9b^2 = (-2a + 3b)(2a + 3b)$       D.  $x^2 - 7x - 8 = x(x-7) - 8$

4. 下列各式中, 能用平方差公式分解因式的是 (      )

A.  $a^2 + b^2$     B.  $-a^2 + b^2$     C.  $-a^2 - b^2$     D.  $-(-a^2) + b^2$

5. 若  $9x^2 + mxy + 16y^2$  是一个完全平方式, 那么  $m$  的值是 (      )

A.  $-12$     B.  $\pm 24$     C.  $12$     D.  $\pm 12$

6. 若  $a^2 + a = -1$ , 则  $a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a + 3$  的值为 (      )

A.  $8$     B.  $7$     C.  $10$     D.  $12$

7. 已知  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$ , 那么  $x, y$  的值分别为 (      )

A.  $x=1, y=3$     B.  $x=1, y=-3$     C.  $x=-1, y=3$     D.  $x=1, y=-3$

8. 把  $(m^2 + 3m)^4 - 8(m^2 + 3m)^2 + 16$  分解因式得 (      )

A.  $(m+1)^4(m+2)^2$       B.  $(m-1)^2(m-2)^2(m^2+3m-2)$

C.  $(m+4)^2(m-1)^2$       D.  $(m+1)^2(m+2)^2(m^2+3m-2)^2$

9. 把  $x^2 - 7x - 60$  分解因式, 得( )

A.  $(x-10)(x+6)$       B.  $(x+5)(x-12)$

C.  $(x+3)(x-20)$       D.  $(x-5)(x+12)$

10. 把  $3x^2 - 2xy - 8y^2$  分解因式, 得( )

A.  $(3x+4)(x-2)$       B.  $(3x-4)(x+2)$

C.  $(3x+4y)(x-2y)$       D.  $(3x-4y)(x+2y)$

11. 把  $a^2 + 8ab - 33b^2$  分解因式, 得( )

A.  $(a+11)(a-3)$       B.  $(a-11b)(a-3b)$

C.  $(a+11b)(a-3b)$       D.  $(a-11b)(a+3b)$

12. 把  $x^4 - 3x^2 + 2$  分解因式, 得( )

A.  $(x^2 - 2)(x^2 - 1)$       B.  $(x^2 - 2)(x+1)(x-1)$

C.  $(x^2 + 2)(x^2 + 1)$       D.  $(x^2 + 2)(x+1)(x-1)$

13. 多项式  $x^2 - ax - bx + ab$  可分解因式为( )

A.  $-(x+a)(x+b)$       B.  $(x-a)(x+b)$

C.  $(x-a)(x-b)$       D.  $(x+a)(x+b)$

14. 一个关于  $x$  的二次三项式, 其  $x^2$  项的系数是 1, 常数项是  $-12$ , 且能分解因式, 这样的二次三项式是( )

A.  $x^2 - 11x - 12$  或  $x^2 + 11x - 12$       B.  $x^2 - x - 12$  或  $x^2 + x - 12$

C.  $x^2 - 4x - 12$  或  $x^2 + 4x - 12$       D. 以上都可以

15. 下列各式  $x^3 - x^2 - x + 1$ ,  $x^2 + y - xy - x$ ,  $x^2 - 2x - y^2 + 1$ ,

$(x^2 + 3x)^2 - (2x + 1)^2$  中, 不含有  $(x - 1)$  因式的有( )

- A. 1 个    B. 2 个    C. 3 个    D. 4 个

16. 把  $9 - x^2 + 12xy - 36y^2$  分解因式为( )

- A.  $(x - 6y + 3)(x - 6x - 3)$     B.  $-(x - 6y + 3)(x - 6y - 3)$   
C.  $-(x - 6y + 3)(x + 6y - 3)$     D.  $-(x - 6y + 3)(x - 6y + 3)$

17. 下列因式分解错误的是( )

- A.  $a^2 - bc + ac - ab = (a - b)(a + c)$     B.  $ab - 5a + 3b - 15 = (b - 5)(a + 3)$   
C.  $x^2 + 3xy - 2x - 6y = (x + 3y)(x - 2)$   
D.  $x^2 - 6xy - 1 + 9y^2 = (x + 3y + 1)(x + 3y - 1)$

18. 已知  $a^2x^2 \pm 2x + b^2$  是完全平方式, 且  $a, b$  都不为零, 则  $a$  与  $b$  的关系为( )

- A. 互为倒数或互为负倒数    B. 互为相反数  
C. 相等的数    D. 任意有理数

19. 对  $x^4 + 4$  进行因式分解, 所得的正确结论是( )

- A. 不能分解因式    B. 有因式  $x^2 + 2x + 2$   
C.  $(xy + 2)(xy - 8)$     D.  $(xy - 2)(xy - 8)$

20. 把  $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$  分解因式为( )

- A.  $(a^2 + b^2 + ab)^2$     B.  $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$

C.  $(a^2 - b^2 + ab)(a^2 - b^2 - ab)$       D.  $(a^2 + b^2 - ab)^2$

21.  $-(3x-1)(x+2y)$  是下列哪个多项式的分解结果(      )

A.  $3x^2 + 6xy - x - 2y$       B.  $3x^2 - 6xy + x - 2y$

C.  $x + 2y + 3x^2 + 6xy$       D.  $x + 2y - 3x^2 - 6xy$

22.  $64a^8 - b^2$  因式分解为(      )

A.  $(64a^4 - b)(a^4 + b)$       B.  $(16a^2 - b)(4a^2 + b)$

C.  $(8a^4 - b)(8a^4 + b)$       D.  $(8a^2 - b)(8a^4 + b)$

23.  $9(x-y)^2 + 12(x^2 - y^2) + 4(x+y)^2$  因式分解为(      )

A.  $(5x-y)^2$       B.  $(5x+y)^2$       C.  $(3x-2y)(3x+2y)$       D.  $(5x-2y)^2$

24.  $(2y-3x)^2 - 2(3x-2y) + 1$  因式分解为(      )

A.  $(3x-2y-1)^2$       B.  $(3x+2y+1)^2$

C.  $(3x-2y+1)^2$       D.  $(2y-3x-1)^2$

25. 把  $(a+b)^2 - 4(a^2 - b^2) + 4(a-b)^2$  分解因式为(      )

A.  $(3a-b)^2$       B.  $(3b+a)^2$       C.  $(3b-a)^2$       D.  $(3a+b)^2$

26. 若  $4xy - 4x^2 - y^2 - k$  有一个因式为  $(1-2x+y)$ , 则  $k$  的值为(      )

A. 0      B. 1      C. -1      D. 4

27. 分解因式  $3a^2x - 4b^2y - 3b^2x + 4a^2y$ , 正确的是( )

A.  $-(a^2 + b^2)(3x + 4y)$       B.  $(a - b)(a + b)(3x + 4y)$

C.  $(a^2 + b^2)(3x - 4y)$       D.  $(a - b)(a + b)(3x - 4y)$

28. 分解因式  $2a^2 + 4ab + 2b^2 - 8c^2$ , 正确的是( )

A.  $2(a + b - 2c)$       B.  $2(a + b + c)(a + b - c)$

C.  $(2a + b + 4c)(2a + b - 4c)$       D.  $2(a + b + 2c)(a + b - 2c)$

### 三、因式分解:

1.  $m^2(p - q) - p + q$

2.  $a(ab + bc + ac) - abc$

3.  $x^4 - 2y^4 - 2x^3y + xy^3$  (立方和)

4.  $abc(a^2 + b^2 + c^2) - a^3bc + 2ab^2c^2$

5.  $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

6.  $(x^2 - 2x)^2 + 2x(x - 2) + 1$

7.  $(x - y)^2 + 12(y - x)z + 36z^2$

8.  $x^2 - 4ax + 8ab - 4b^2$

$$9. (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 + 2(ax + by)(ay - bx)$$

$$10. 5m - 5n - m^2 + 2mn - n^2$$

$$11. (x+1)^2 - 9(x-1)^2$$

$$12. 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$13. ab^2 - ac^2 + 4ac - 4a$$

$$14. x^2 + 18x - 144$$

$$15. x^4 + 2x^2 - 8$$

$$16. -m^4 + 18m^2 - 17$$

$$17. x^5 - 2x^3 - 8x$$

$$18. m^4 + m^2 + 1$$

$$19. (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 48$$