

## 2018 暑期初三数学基础教案参考答案 目录

|        |                     |    |
|--------|---------------------|----|
| 第 1 讲  | 图形的放缩与比例线段 .....    | 1  |
| 第 2 讲  | 三角形一边的平行线 (1) ..... | 1  |
| 第 3 讲  | 三角形一边的平行线 (2) ..... | 2  |
| 第 4 讲  | 相似三角形的判定 .....      | 2  |
| 第 5 讲  | 相似三角形判定的应用 .....    | 3  |
| 第 6 讲  | 相似三角形的性质 (1) .....  | 4  |
| 第 7 讲  | 相似三角形的性质 (2) .....  | 5  |
| 第 8 讲  | 相似三角形单元测试卷 .....    | 6  |
| 第 9 讲  | 锐角三角比 .....         | 6  |
| 第 10 讲 | 求锐角三角比的值 .....      | 7  |
| 第 11 讲 | 解直角三角形 .....        | 9  |
| 第 12 讲 | 解直角三角形的应用 .....     | 11 |
| 第 13 讲 | 锐角三角比单元测试卷 .....    | 13 |
| 第 14 讲 | 二次函数的概念图像与性质 .....  | 15 |
| 第 15 讲 | 二次函数的图像与性质 .....    | 19 |
| 第 16 讲 | 二次函数的图像与性质综合 .....  | 23 |

## 2018 暑期初三数学基础教案参考答案

### 第 1 讲 图形的放缩与比例线段

**【例题剖析】**

例 1、 $\frac{4}{3}$ ； $\frac{9}{16}$       例 2、 $\frac{3}{5}$       例 3、 $\frac{8}{3}$       例 4、9

**【经典习题】**

(A) 组

1、24；      2、300；      3、 $5\sqrt{5}-5, 15-5\sqrt{5}$ ；      4、 $\frac{7}{5}, \frac{12}{5}, 2$ ；  
5、2 或 3；      6、(1)  $5\sqrt{6}$ ；(2)  $\pm 5\sqrt{6}$ ；(3)  $\frac{20}{3}$ ；(4)  $\frac{3}{2}$ ；      7、9；

(B) 组

8、 $\frac{19}{5}$ ；      9、四；      10、略；      11、(1)  $\frac{3}{4}$ ；(2) 4；

(C) 组

12、 $(4+\sqrt{5})a$ ；      13、略；      14、 $\frac{56}{3}$ ；      15、6；      16、略

### 第 2 讲 三角形一边的平行线 (1)

**【例题剖析】**

例 1、略      例 2、作 MG 平行于 DF，NH 平行于 DF 交 AB 于点 H，AM 于点 K，过程略  
例 3、略      例 4、略

**【经典习题】**

(A) 组

1、27；      2、3:2；      3、14；      4、6；      5、 $\frac{5}{11}$ ；      6、1:3；

(B) 组

7、 $\frac{9}{5}$ ；      8、 $\frac{40}{13}$ ；      9、 $\frac{6}{5}\sqrt{2}$ ；      10、3:2；

(C) 组

11、5:3:12;      12、 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ;      13、 $\frac{14}{3}$ ;      14、 $\frac{56}{3}$ ;

### 第3讲 三角形一边的平行线 (2)

**【例题剖析】**

例 1、(1)  $\frac{m+n}{n}$ ; (2) 垂直;      例 2、 $\frac{4}{5}$ ;

例 3、(1)  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x, 0 < x < 6$       (2)  $BP = 2$

**【经典习题】**

(A) 组

1、 $DE = \frac{15}{4}, EF = \frac{25}{4}$ ;      2、 $\frac{36}{7}$ ;      3、略;      4、略;      5、 $\frac{1}{3}$ ;

(B) 组

6、3:2;    7、 $\frac{2}{3}$ ;      8、48;      9、 $10-8\sqrt{2}$ ;      10、20; 6;

(C) 组

11、略;      12、略;

### 第4讲 相似三角形的判定

**【例题剖析】**

**【例 1】** C

**【例 2】** A

**【例 3】** 提示：三边对应成比例

**【例 4】** 提示：两角对应相等

**【例 5】** 提示：证明  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

**【经典习题】**

(A) 组

1. A    2. D    3. C    4. C    5. B    6. D    7. B    8. B    9. 略

(B) 组

10. 提示：两组角对应相等

11. (1) 提示：两组角对应相等 (2)  $y = \frac{1}{6}x^2 (x > 0)$

12. (1)  $\triangle ABD \sim \triangle EDC, \triangle BAC \sim \triangle FCG$

(2) 提示：利用两对相似的对应边成比例证明

(C) 组

13. 提示：证明  $\triangle EAB \sim \triangle DAC$

14. (1) 提示：两边对应成比例且夹角相等 (2) 提示： $\angle CDB = \angle DCB = 72^\circ$

15. (1)  $t = \frac{30}{11}$  或  $\frac{50}{30}$  (2)  $t = 2$  或  $3$

## 第 5 讲 相似三角形判定的应用

### 【例题剖析】

【例 1】  $\frac{15}{2}$

【例 2】 提示：两边对应成比例且夹角相等

### 【经典习题】

(A) 组

1. 提示：三边对应成比例

2. 提示：有两种截法

3. (1)  $\triangle ABC \sim \triangle DEF, \triangle DEB \sim \triangle EFC$

(2) 提示：利用两对相似的对应边成比例证明

4. 8.12 米

5. 提示：先证  $\triangle ADN \sim \triangle MAB$  (两角对应相等)，再用相似三角形对应线段正比例来证明

(B) 组

6.

(1)提示：先证  $\triangle ADE \sim \triangle ACD$  (两角对应相等)，再用相似三角形对应线段正比例来证明

(2)提示：先证  $\triangle AEF \sim \triangle ABC$  (两角对应相等)，再用相似三角形对应线段正比例来证明

7. 提示：三边对应成比例

8.  $\frac{9\sqrt{34}}{34}$

(C) 组

9. (1) 提示：延长  $FE$  交  $CD$  的延长线于点  $G$ ，先证明  $\triangle AFE \cong \triangle DGE$  (H.L)，再证  $\triangle EFC$

$\cong \triangle EGC$  (S.A.S)，再证  $\triangle AEF \sim \triangle ECF$

(2) 存在， $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10.  $AP = 9$ 或 $4$

11. (1) 提示：两组角对应相等

(2) 相似 (提示：两组角对应相等)，相似 (提示：两边对应成比例且夹角相等)

$$y = \frac{x^2 - 4x + 16}{8 - x} (0 \leq x < 8)$$

## 第 6 讲 相似三角形的性质 (1)

【例题剖析】

【例 1】 (1) 2: 3 (2) 9: 4 (3) 3: 4 (4) 3: 4

【例 2】 8      【例 3】 100      【例 4】 24

【经典习题】

(A) 组

1. 4: 9      2. 4: 3      3. 18 或 8      4. 3: 4      5. C

6. D      7. 14      8. 20

(B) 组

9. C                      10. 2:9                      11. 3.75                      12. D                      13. C  
 14. 5                      15. (1)  $\frac{1}{2}$     (2)  $\frac{3}{4}$

(C) 组

16. (1) 8    (2)  $\frac{1}{12}$                       17.  $AH = 16$                       18. 24

## 第 7 讲 相似三角形的性质 (2)

【例题剖析】

- 【例 1】 C                      【例 2】 D                      【例 3】 D                      【例 4】 100cm

【经典习题】

(A) 组

1. 1: 4, 1: 4, 1: 4, 1: 16                      2.  $\frac{3}{2}$ , 24,  $\frac{81}{2}$   
 3. 36, 64                      4. 2: 3, 6, 25  
 5. 20 米                      6. 2: 3

(B) 组

7. (1) 3: 5 (2) 3: 5 (3) 9: 25                      8. (1) 提示: 两组角对应相等 (2) 24  
 9.  $DE = 6\sqrt{3}, FG = 6\sqrt{6}$                       10.  $2400cm^2$

(C) 组

11. (1) 提示: 两组角对应相等 (2) 2 (3)  $n$   
 12. (1)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (2)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} (0 \leq x \leq \frac{7}{8})$  (3)  $90^\circ$   
 13. (1)  $\frac{4}{5}$  (2) 相似 (3)  $F_1(3,8), F_2(-3,0), F_3(-\frac{75}{14}, -\frac{22}{7}), F_4(-\frac{42}{25}, \frac{44}{25})$

## 第 8 讲 相似三角形单元测试卷

一. 选择题【本题共 6 题, 每小题 3 分, 共 18 分】

1. D 2. B 3. C 4. D 5. C 6. B

二. 填空题【本题共 12 题, 每小题 3 分, 共 36 分】

7.  $\frac{7}{4}$  8. 4: 9 9.  $5\vec{a} + 4\vec{b}$  10.  $\vec{a} = -6\vec{e}$  11.  $\frac{16}{3}$  12.  $\frac{6}{5}$ ; 13.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  14. 2

15. 144 16. 6 或 8 17.  $\frac{75}{8}$  18. 35

三. 简答题【本题共 4 题, 每题 8 分, 共 32 分】

19. 解:  $DE = 9$

20. 略

21. (1)  $\therefore \triangle CEG \sim \triangle CAD \therefore \frac{EG}{AD} = \frac{CG}{CD}$

(2) 先证  $\triangle AFD \sim \triangle CGD \therefore \angle ADF = \angle GDC \therefore DF \perp DG$

22. 3; 23.  $2\sqrt{2}$ ; 24.  $\frac{2}{2+n}$ ;

25. (1) 两个内角对应相等的三角形相似

(2)  $s = \frac{-4t^2 + 8t}{5t^2 - 16t + 16} (0 < t < 2)$

(3)  $s = \frac{4}{5}$  或  $\frac{24}{25}$

## 第 9 讲 锐角三角比

一、 1、  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2、  $\frac{12}{13}$ ; 3、  $\frac{1}{2}$ ; 4、  $\frac{5}{12}$ ,  $\frac{12}{13}$ ; 5、  $2\sqrt{3}$ ;

6、  $\frac{2}{5}$ ; 7、  $\frac{3}{5}$ ; 8、  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 9、 8; 10、  $\frac{3}{5}$ ;

二、 1、 C; 2、 B; 3、 C; 4、 B; 5、 C; 6、 B; 7、 D; 8、 D;

拓展题: (1) 证明:  $\because \angle ACB = 90^\circ$ ,  $CM$  是斜边  $AB$  的中线

$\therefore MC = MA = MB$  ..... (1 分)

$\therefore \angle A = \angle AC$ ..... (1 分)

$\therefore MD \perp MC \therefore \angle CMD = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \angle CMD &= \angle ACB \quad \dots\dots\dots (1 \text{分}) \\ \therefore \triangle CDM &\sim \triangle ABC \quad \dots\dots\dots (1 \text{分}) \\ \therefore \frac{MC}{AC} &= \frac{DM}{BC} \quad \text{即 } MC \cdot BC = DM \cdot AC \quad \dots\dots\dots (2 \text{分}) \end{aligned}$$

(2) 解:  $\because \angle ACB = 90^\circ \therefore \angle E + \angle CDM = 90^\circ$   
 同理  $\angle DCM + \angle CDM = 90^\circ \therefore \angle DCM = \angle E$   
 $\therefore \angle A = \angle ACM \quad \therefore \angle A = \angle E \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$   
 又  $\because \angle DMA = \angle BME$   
 $\therefore \triangle ADM \sim \triangle EBM \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$   
 $\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{MB}{DM} \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$   
 $\therefore MC = MB \quad \therefore \frac{BE}{AD} = \frac{MC}{DM}$   
 $\therefore \frac{MC}{AC} = \frac{DM}{BC} \quad \text{即 } \frac{MC}{DM} = \frac{AC}{BC}$   
 $\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{AC}{BC} \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$   
 又  $\because \tan A = \frac{2}{3}$ , 即  $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$   
 $\therefore BE = 9 \quad \dots\dots\dots (2 \text{分})$

## 第 10 讲 求锐角三角比的值

1、 $30^\circ$ ; 2、0; 3、 $\frac{13}{7}$ ; 4、3; 5、3; 6、B; 7、4,  $\frac{11\sqrt{5}}{75}$ ;

8、(1) BD 是 AC 的中垂线, 得等腰三角形 BEC

(2) 在直角三角形中,  $AD=3x, AB=4x$ , 得  $BD=\sqrt{7}x, \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$

9、(1) 先证  $\triangle ABO \sim \triangle DCO$  (2) 9

拓展题:

解: (1) 过点 A、D 分别作  $AM \perp BC, DN \perp BC$ , 垂足分别为点 M、N.  $\dots\dots\dots (1 \text{分})$

在  $Rt\triangle ABM$  中,  $AM = AB \cdot \sin B = 5 \times \frac{4}{5} = 4, \therefore BM = 3 \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$

同理可得:  $DN = 3$

又可证得四边形 AMND 为矩形,  $\therefore MN = AD = 3.5 \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$

$\therefore BC = 9.5 \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$

(2) 方法 1: 过点 D 作  $DN \parallel FP$  交 BC 于点 N,  $\dots\dots\dots (1 \text{分})$

在梯形 ABCD 中,  $\because AB = DC, \therefore \angle B = \angle C$

$$\therefore \angle EPC = \angle B + \angle BEP = \angle EPF + \angle GPC \quad \text{又 } \angle EPF = \angle B$$

$$\therefore \angle BEP = \angle GPC$$

$$\because DN \parallel FP \quad \therefore \angle DNC = \angle GPC \quad \therefore \angle BEP = \angle DNC$$

$$\therefore \triangle PEB \sim \triangle DNC \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$$

$$\therefore \frac{BE}{NC} = \frac{BP}{DC} \quad \dots\dots\dots (1 \text{分})$$

$$\therefore \frac{3}{9.5-x-y} = \frac{x}{5} \quad y = \frac{-x^2 + 9.5x - 15}{x} \quad (2 < x < 7.5) \dots\dots\dots (1 \text{ 分}, 1 \text{ 分})$$

方法 2: 在梯形  $ABCD$  中,  $\because AB=DC$ ,  $\therefore \angle B=\angle C$   
 $\because \angle EPC=\angle B+\angle BEP=\angle EPF+\angle GPC$  又  $\angle EPF=\angle B$

$$\therefore \angle BEP= \angle GPC \quad \therefore \triangle PEB \sim \triangle GPC \quad \therefore \frac{BE}{PC} = \frac{BP}{CG}$$

$\because BE=3, BP=x, PC=9.5-x$

$$\therefore \frac{3}{9.5-x} = \frac{x}{CG}, \quad \therefore CG = \frac{-x^2 + 9.5x}{3} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore DG = \frac{-x^2 + 9.5x}{3} - 5 = \frac{-x^2 + 9.5x - 15}{3}$$

$\because AD//BC \quad \therefore \triangle GFD \sim \triangle GPC$  又  $\triangle GPC \sim \triangle PEB \quad \therefore \triangle EPB \sim \triangle GFD$

$$\therefore \frac{BE}{DF} = \frac{BP}{GD} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{即 } \frac{3}{y} = \frac{x}{\frac{-x^2 + 9.5x - 15}{3}} \therefore y = \frac{-x^2 + 9.5x - 15}{x} \quad (2 < x < 7.5) \dots\dots\dots (1 \text{ 分}, 1 \text{ 分})$$

(3) 方法 1: ①当  $PE=PF$  时, 过点  $D$  作  $DN//FP$  交  $BC$  于点  $N$ .

可证:  $DN=PF=PE$ , 进而可证:  $\triangle PEB \cong \triangle DNC$

$$\therefore BP=DC=5 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

②当  $FP=FE$  时, 如图 1, 过点  $D$  作  $DN//FP$  交  $BC$  于点  $N$ , 过点  $F$  作  $FQ \perp EP$ , 垂足为点  $Q$ , 可得  $EQ=PQ$ .

$$\text{可证: } \triangle PEB \sim \triangle DNC \quad \therefore \frac{BP}{CD} = \frac{PE}{DN}$$

$$\text{又可证: } \cos \angle EPF = \cos B = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{PQ}{FP} = \frac{3}{5} \quad \therefore \frac{PE}{PF} = \frac{6}{5}$$

$$\text{又可证 } PF=DN \quad \therefore \frac{PE}{DN} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{BP}{5} = \frac{6}{5} \quad \therefore BP = 6. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

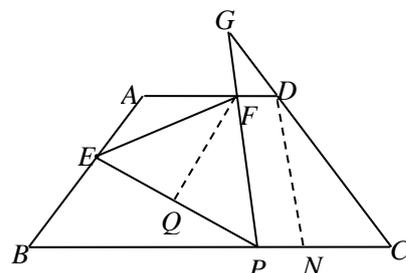


图 1

③当  $EF=EP$  时, 如图 2, 过点  $D$  作  $DN//FP$  交  $BC$  于点  $N$ , 过点  $E$  作  $EH \perp FP$ , 垂足为点  $H$ , 可得  $FH=PH$ .

$$\text{同②可得: } \frac{BP}{5} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore BP = \frac{25}{6} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

综上所述,  $BP = 5$  或  $6$  或  $\frac{25}{6}$ .

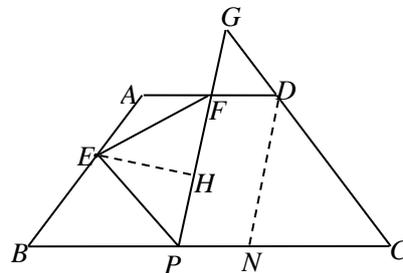


图 2

方法 2: ①当  $PE=PF$  时,  $\because \triangle BEP \sim \triangle CPG$

$$\therefore \frac{BE}{PC} = \frac{EP}{GP} \quad \therefore \frac{BE}{PC} = \frac{FP}{GP}$$

$$\because AD//BC, \quad \therefore \frac{CD}{GC} = \frac{FP}{GP}, \quad \therefore \frac{BE}{PC} = \frac{CD}{GC}$$

即  $\frac{3}{9.5-x} = \frac{5}{\frac{x(9.5-x)}{3}}$   $\therefore x=5$  ..... (1分)

②当  $FP=FE$  时, 如图 3, 过点  $F$  作  $FQ \perp EP$ , 垂足为点  $Q$ , 可得  $EQ=PQ$ .

易得  $\cos \angle EPF = \cos B = \frac{3}{5}$

即  $\frac{PQ}{FP} = \frac{3}{5} \therefore \frac{EP}{FP} = \frac{6}{5}$

$\therefore \frac{BE}{PC} = \frac{EP}{GP} = \frac{6}{5} \cdot \frac{FP}{GP} \therefore \frac{CD}{GC} = \frac{FP}{GP}$

$\therefore \frac{BE}{PC} = \frac{6}{5} \cdot \frac{CD}{GC}$  即  $\frac{3}{9.5-x} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{\frac{x(9.5-x)}{3}}$

$\therefore x=6$  ..... (2分)

③当  $EF=EP$  时, 如图 4, 过点  $E$  作  $EH \perp FP$ , 垂足为点  $H$ , 可得  $FH=PH$

易得  $\cos \angle EPF = \cos B = \frac{3}{5}$

即  $\frac{PH}{EP} = \frac{3}{5} \therefore \frac{FP}{EP} = \frac{6}{5}$

$\therefore \frac{BE}{PC} = \frac{EP}{GP} = \frac{5}{6} \cdot \frac{FP}{GP} \therefore \frac{CD}{GC} = \frac{FP}{GP}$

$\therefore \frac{BE}{PC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{CD}{GC}$

即  $\frac{3}{9.5-x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{\frac{x(9.5-x)}{3}}$

$\therefore x = \frac{25}{6}$  ..... (2分)

综上所述,  $BP = 5$  或  $6$  或  $\frac{25}{6}$ .

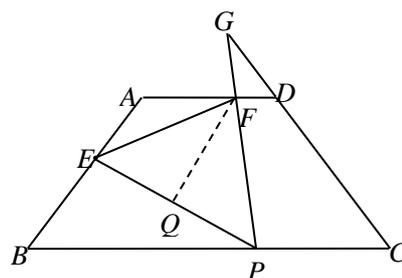


图 3

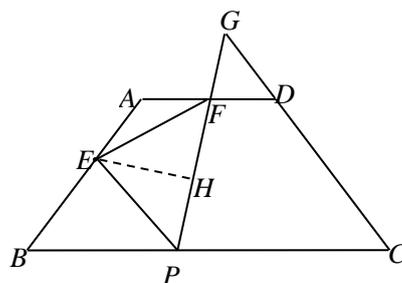


图 4

### 第 11 讲 解直角三角形

- 1、B; 2、 $\sqrt{2}$ ; 3、 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ; 4、 $BC = \frac{20\sqrt{3}}{3}, AB = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ ; 5、24; 6、 $8\sqrt{3}$ ; 7、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

拓展题

解: (1)  $\frac{6}{5} < x < 6$  ..... (2分)

(2)  $\because \tan \angle MAB = 2, x = 2 \therefore CP=4, \therefore PB=4, \therefore \angle B=45^\circ$  ..... (1分)

∵  $\triangle ADN \sim \triangle ABC$ , 且  $\angle BAD = \angle BCA$ ,  
 ∴  $\angle CAB = \angle AND$  或  $\angle CAB = \angle ADN$ .----- (1分, 1分)

情况一: 当  $\angle CAB = \angle AND$  时,  $AC \parallel DN$ , ∴  $PN:PD = AP:CP$

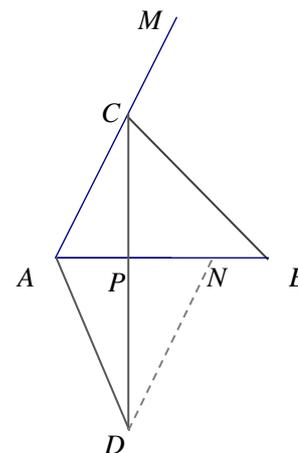
∵  $\tan \angle MAB = 2$  ∴  $AP:CP = 1:2$ ,  $PN:PD = 1:2$ ,

设  $PN = k$ , 则  $PD = 2k$

此时  $\frac{AC}{CB} = \frac{AN}{AD}$ , ∴  $\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{2+k}{\sqrt{4+4k^2}}$ , ----- (1分)

∴  $3k^2 - 8k - 3 = 0$  ∴  $k = 3, k = -\frac{1}{3}$  (舍)

即  $PN = 3$ ----- (1分)



情况二: 当  $\angle CAB = \angle ADN$  时,  $\angle N = 45^\circ$ ,

设  $PN = y$ , 则  $PD = y$

此时  $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{AN}$ , ∴  $\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2+y}$  ----- (1分)

∴  $3y^2 - 20y + 12 = 0$  ∴  $k = 6, k = \frac{2}{3}$

∵ 当  $k = \frac{2}{3}$  时,  $\angle BAD = \angle BCA$  不成立, ∴  $k = \frac{2}{3}$  舍去

∴  $PN = 6$ ----- (1分)

(3) 作  $BH \perp AC$ , ∵  $AB \times PC = AC \times BH$ , 即  $6 \times 2x = \sqrt{5}x \times HB$

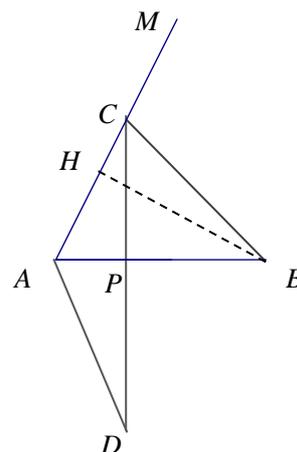
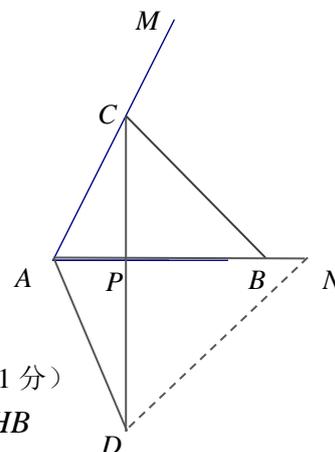
∴  $HB = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ----- (1分)

∵  $\tan \angle MAB = 2$  ∴  $HA = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ , ∴  $HC = \sqrt{5}x - \frac{6\sqrt{5}}{5}$

∵  $\angle BAD = \angle BCA$ , ∴  $\triangle BCH \sim \triangle DAP$ ,

∴  $\frac{AP}{PD} = \frac{CH}{BH}$ , 即  $\frac{x}{PD} = \frac{\sqrt{5}x - \frac{6\sqrt{5}}{5}}{\frac{12\sqrt{5}}{5}}$ ,

∴  $PD = \frac{12x}{5x-6}$ ----- (2分)



## 第 12 讲 解直角三角形的应用

1、16; 2、 $1 : \sqrt{3}$ ; 3、 $35^\circ$ ;

4、解：此车没有超速.

理由如下：过 C 作  $CH \perp MN$ ，垂足为 H

$\because \angle CBN=60^\circ, BC=200$  米，

$$\therefore CH=BC \cdot \sin 60^\circ = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} \text{ (米)}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$BH=BC \cdot \cos 60^\circ = 100 \text{ (米)}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because \angle CAN=45^\circ, \therefore AH=CH=100\sqrt{3} \text{ 米}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore AB=100\sqrt{3} - 100 \approx 73 \text{ (m)}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{车速为 } \frac{73}{5} = 14.6 \text{ m/s} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\because 60 \text{ 千米/小时} = \frac{50}{3} \text{ m/s},$$

$$\text{又 } \because 14.6 < \frac{50}{3} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$\therefore$  此车没有超速.  $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

5、解：(1) 由题意得， $AB=60$  米， $\angle BAC=30^\circ, \angle BEF=36^\circ, FM \parallel CG$

$$\because \text{点 } D \text{ 是 } AB \text{ 的中点 } \therefore BD=AD=\frac{1}{2} AB=30 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\because DF \parallel AC \text{ 交 } BC、HG \text{ 分别于点 } F、M, \therefore \angle BDF=\angle A=30^\circ, \angle BFE=\angle C=90^\circ$$

在  $Rt\triangle BFD$  中， $\angle BFD=90^\circ$ ,

$$\cos \angle BDF = \frac{DF}{BD}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DF}{30}, \quad DF = 15\sqrt{3} \approx 25.5 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\sin \angle BDF = \frac{BF}{BD}, \quad \frac{1}{2} = \frac{BF}{30}, \quad BF = 15 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

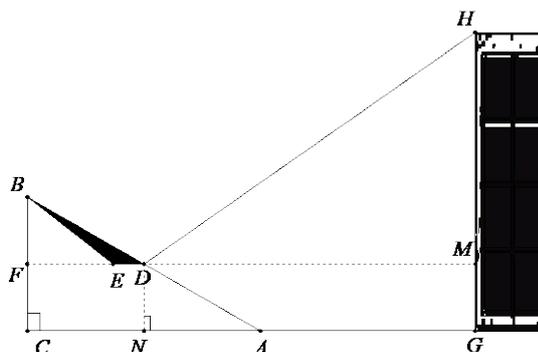
在  $Rt\triangle BFE$  中， $\angle BFE=90^\circ$ ,

$$\tan \angle BEF = \frac{BF}{EF}, \quad 0.7 = \frac{15}{EF},$$

$$EF=21.4 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore DE=DF-EF=25.5-21.4=4.1 \approx 4 \text{ (米)}$$

答：平台  $DE$  的长约为 4 米.  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$



6、解：过点 C 作  $CG \perp AE$ ，垂足为点 G.  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由题意得  $\angle CEF = 45^\circ = \angle CEG$ ,  $\angle ACG = 60^\circ$  ..... (1分)  
 设  $CG = x$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ACG$  中,  $AG = CG \cdot \tan \angle ACG = \sqrt{3}x$  ..... (1分)

在  $\text{Rt}\triangle ECG$  中,  $EG = CG \cdot \cot \angle CEG = x$  ..... (1分)

$\because AG + EG = AE$

$\therefore \sqrt{3}x + x = 36 - 6$  ..... (2分)

解得:  $x = 15\sqrt{3} - 15$  ..... (2分)

又可求得:  $CF = EG = 15\sqrt{3} - 15$

$\therefore CD = 15\sqrt{3} - 15 + 6 = 15\sqrt{3} - 9$  ..... (1分)

答: 该旗杆  $CD$  的高为  $(15\sqrt{3} - 9)$  米. .... (1分)

7、解: (1) 过点  $A$  作  $AF \perp OC$ , 垂足为点  $F$  ..... (1分)

在  $\text{Rt}\triangle AFO$  中,  $\because \angle AOF = 37^\circ$ ,  $AO = 50\text{cm}$ ,

$\therefore OF = 50 \times \cos 37^\circ$  ..... (2分)  
 $= 50 \times 0.8$

$= 40\text{cm}$  ..... (1分)

$\therefore CF = 50 - 40 = 10\text{cm}$  ..... (1分)

答: 小球达到最高点位置与最低点位置的高度差为  $10\text{cm}$ . .... (1分)

(2) 因为  $B$  点与  $A$  点的高度相同, 所以  $B$  点与  $C$  点的高度差为  $10\text{cm}$ , 联结  $BF$ ,  $BF \perp OC$ .

设  $OD$  长为  $x\text{cm}$ , ..... (1分)

$\because \angle BDE = 30^\circ$ ,  $\angle ODE = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle BDC = 60^\circ$ ,

$\therefore DF = (40 - x)\text{cm}$ ,  $DB = (50 - x)\text{cm}$ , ..... (2分)

在  $\text{Rt}\triangle DFB$  中,  $40 - x = (50 - x)\cos 60^\circ$ , ..... (1分)

$$x = 30$$

$\therefore OD = 30$  ..... (1分)

答:  $OD$  这段细绳的长度为  $30\text{cm}$ . .... (1分)

8、解: 过点  $A$  作  $AH \perp BC$ , 垂足为  $H$  (如图) ..... (1分)

设  $AH = x$  (米). 在  $\text{Rt}\triangle ABH$  中, 由  $\angle AHB = 90^\circ$ ,

$\angle B = 45^\circ$  得  $BH = AH \cdot \cot 45^\circ = AH = x$ . .... (1+1分)

在  $\text{Rt}\triangle ACH$  中, 由  $\angle AHC = 90^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$  得  $CH = \frac{AH}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}}$  ..... (1+1分)

$\because BC = 30$ ,  $\therefore x + \frac{x}{\sqrt{3}} = 30$ . .... (2分)

解得  $x = 45 - 15\sqrt{3} \approx 19.5 \approx 20$  (米) ..... (1+1分)

答: 这条河的宽度约为  $20$  米. .... (1分)

## 第 13 讲 锐角三角比单元测试卷

1. A; 2. C; 3. C; 4. C; 5. B; 6. A.

7.  $\frac{3}{5}$ ;  $\frac{4}{5}$ ;  $\frac{3}{4}$ ; 8.  $\sqrt{3}$ ; 9.  $\frac{\sqrt{21}}{2}$  10.  $30^\circ$ ; 11.  $30^\circ$ ; 12.  $\frac{3}{2}$ ;

13.  $\frac{3}{4}$ ; 14. 115.5 米; 15.  $\sqrt{10}$ ; 16. 8.2; 17.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 18. 10 或  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ .

19. 解: 原式 =  $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$  .....4 分

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= -2 - \sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

20. 解: 令  $x=0$ , 得  $y=4$ . 令  $y=0$ , 得  $x=-3$ .

则  $A(-3, 0)$ ,  $B(0, 4)$  .....2 分

$\therefore OA=3$ ,  $OB=4$ .  $\because \angle AOB=90^\circ \therefore AB=5$ .....2 分

$\therefore \sin \angle ABO = \frac{OA}{AB}$  .....4 分

$$= \frac{3}{5} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

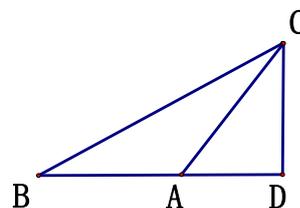
21. 解: 设正方形边长为  $a$ , 则  $AB=BC=a$ .....1 分

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形

$\therefore \angle B=90^\circ \quad \therefore AC = \sqrt{2} a$  .....4 分

$\therefore CE=AC=\sqrt{2} a$  .....2 分

$\therefore \cot \angle E = \frac{BE}{AB} = \sqrt{2} + 1$  .....3 分



22. 解: 如图, 由题意得  $\angle CAD=60^\circ$ ,  $\angle CBD=30^\circ$ ,  $AB=10$  米, 设  $AD=x$  米, .....2 分

在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中  $CD=AD \cdot \tan \angle CAD = \sqrt{3} x$  .....4 分

在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中  $BD=CD \cdot \cot \angle CBD = 3x$  .....3 分

$\therefore AB=2x=10 \quad \therefore x=5 \quad \therefore CD=\sqrt{3} x=5\sqrt{3} \approx 8.7$ .....2 分

答: 河对岸的树高约为 8.7 米. ....1 分

23. 解：过  $C$  作  $CD \perp AB$  于  $D$  则  $\angle ADC = 90^\circ$  .....1 分

在  $Rt\triangle ACD$  中  $\because \cos \angle DAC = \frac{AD}{AC}$  .....4 分

$$\therefore AD = 3 \cdot \cos 53^\circ \approx 1.8 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore BD = BA - AD = 3 - 1.8 = 1.2 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore 1.2 + 0.5 = 1.7(\text{m}) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

答：秋千踏板与地面的最大距离约为 1.7 米 .....1 分

24. 解：过点  $D$  作  $DF \perp AB$ ，垂足为点  $F$ 。 .....1 分

$\because AB \perp BC, CD \perp BC, \therefore$  四边形  $BCDF$  是矩形， $\therefore BC = DF, CD = BF$ 。 .....2 分

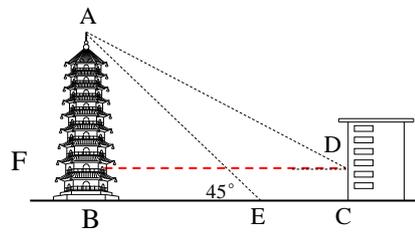
设  $AB = x$  米，在  $Rt\triangle ABE$  中， $\angle AEB = \angle BAE = 45^\circ, \therefore BE = AB = x$ 。 .....2 分

在  $Rt\triangle ADF$  中， $\angle ADF = 30^\circ, AF = AB - BF = x - 3$ ,

$$\therefore DF = AF \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{3}(x - 3) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because DF = BC = BE + EC, \therefore \sqrt{3}(x - 3) = x + 15,$$

$$\therefore x = 12 + 9\sqrt{3} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$



答：塔  $AB$  的高度是  $(12 + 9\sqrt{3})$  米。 ...1 分

25. 解：  $\because \tan \angle AEN = \tan \angle EAN = \frac{1}{3}$  .....1 分

$\therefore$  设  $BE = a, AB = 3a$ ，则  $CE = 2a$

$\because DC + CE = 10, 3a + 2a = 10, \therefore a = 2$ 。 .....2 分

$\therefore BE = 2, AB = 6, CE = 4$ 。

$\because AE = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}, \therefore AG = \sqrt{10}$ 。 .....1 分

又  $\frac{NG}{AG} = \frac{1}{3}, \therefore NG = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 。 .....1 分

$\therefore AN = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$  .....2 分

$\therefore S_{\triangle ANE} = \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 2 = \frac{10}{3}$  .....2 分

$\sin \angle ENB = \frac{EB}{NE} = \frac{2}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{5}$  .....3 分

## 第 14 讲 二次函数的概念图像与性质

### 【例题剖析】

例 1、 $m = 3$ ； 例 2、(1)  $y = -10x^2 + 800x - 12000, 20 \leq x \leq 60$ ；(2) 3000 元

例 3、(1)  $y = 5x^2$ , 顶点  $(0,0)$ , 对称轴  $y$  轴；(2) 不在；(3)  $\left(\pm \frac{\sqrt{30}}{5}, 6\right)$ ；(4)  $S_{\triangle ABO} = \frac{12}{5}$ ；

### 【经典习题】

(A) 组

1. B. 2. C. 3. B. 4. D. 5.  $\frac{2}{5}$ . 6. ④. 7. 2.

8. 一次函数. 9. 顶点,  $(0, 0)$ , 减小, 增大. 10. 依次填 3, 1, 4, 2.

(B) 组

11. D.

12.  $S = -x^2 + 12x$  ( $0 < x < 6$ ).

13、解：(1)  $\because AD = EF = BC = x$ ,

$\therefore AB = 18 - 3x$

$\therefore$  水池的总容积为  $1.5x(18 - 3x) = 36$ ,

即  $x^2 - 6x + 8 = 0$ , 解得:  $x = 2$  或  $4$

答:  $x$  应为  $2m$  或  $4m$

(2) 由 (1) 知  $V$  与  $x$  的函数关系式为:

$V = 1.5x(18 - 3x) = -4.5x^2 + 27x$ ,

$x$  的取值范围是:  $0 < x < 6$

(3)  $V = -4.5x^2 + 27x = -\frac{9}{2}(x - 3)^2 + \frac{81}{2}$

$\therefore$  由函数图象知: 当  $x = 3$  时,  $V$  有最大值  $40.5$

答: 若使水池的总容积最大,  $x$  应为  $3$ , 最大容积为  $40.5m^3$ .

14、解：(1)  $\because$  四条直线  $x = 1, x = 2, y = 1, y = 2$  围成的正方形 ABCD

$\therefore A(1, 2), C(2, 1)$ ,

再根据抛物线的性质， $|a|$ 越大开口越小，

把 A 点代入  $y=ax^2$  得  $a=2$ ，

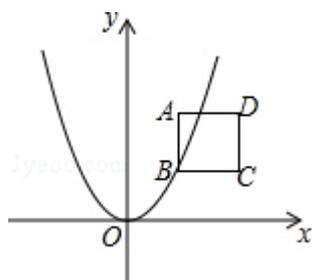
把 C 点代入  $y=ax^2$  得  $a=\frac{1}{4}$ ，

则  $a$  的范围介于这两点之间，故  $\frac{1}{4} \leq a \leq 2$ ；

(2)  $\because a$  为整数且  $\frac{1}{4} \leq a \leq 2$ ，

$\therefore a=1$  或  $2$ ，

$\therefore$  函数的表达式为： $y=x^2$  或  $y=2x^2$ 。



(C) 组

15、解：(1) 设所求抛物线的解析式为： $y=ax^2$ 。

设 D (5, b)，则 B (10, b - 3)，

把 D、B 的坐标分别代入  $y=ax^2$  得：

$$\begin{cases} 25a=b \\ 100a=b-3 \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} a=-\frac{1}{25} \\ b=-1 \end{cases}$

$$\therefore y = -\frac{1}{25}x^2;$$

(2)  $\because b = -1$ ，

$\therefore$  拱桥顶 O 到 CD 的距离为 1，

$$\frac{1}{0.2} = 5 \text{ 小时.}$$

所以再持续 5 小时到达拱桥顶。

16、解：(1) 设二次函数的解析式为  $y=ax^2$ ，

把点 A (3, 3) 代入得  $3=a \times 3^2$ , 解得  $a=\frac{1}{3}$ ;

设一次函数的解析式为  $y=kx+b$ ,

把点 A (3, 3)、点 B (6, 0) 代入得  $\begin{cases} 3k+b=3 \\ 6k+b=0 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k=-1 \\ b=6 \end{cases}$ ,

所以二次函数与一次函数的解析式分别为  $y=\frac{1}{3}x^2$ ,  $y=-x+6$ ;

(2) C 点坐标为 (0, 6),

$\because DE \parallel y$  轴,

$\therefore \angle ODE = \angle COD$ ,  $\angle EDA = \angle OCD$ ,

$\because \angle DOE = \angle EDA$ ,

$\therefore \angle DOE = \angle OCD$ ,

$\therefore \triangle OCD \sim \triangle DOE$ ,

$\therefore OC : OD = OD : DE$ , 即  $OD^2 = OC \cdot DE$ ,

设 E 点坐标为  $(a, \frac{1}{3}a^2)$ , 则 D 点坐标为  $(a, 6-a)$ ,

$OD^2 = a^2 + (6-a)^2 = 2a^2 - 12a + 36$ ,  $OC=6$ ,  $DE=6-a-\frac{1}{3}a^2$ ,

$\therefore 2a^2 - 12a + 36 = 6(6-a-\frac{1}{3}a^2)$ , 解得  $a_1=0$ ,  $a_2=\frac{3}{2}$ ,

$\because E$  是抛物线上 OA 段上一点,

$\therefore 0 < a < 3$ ,

$\therefore a = \frac{3}{2}$ ,

$\therefore$  点 E 坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ ;

(3) 以点 O、C、M、F 为顶点的四边形不能为菱形. 理由如下:

如图, 过 O 点作  $OF \parallel AC$  交抛物线于 F, 过 F 点作  $FM \parallel y$  轴交 AC 延长线于 M 点, 交 x 轴于 H 点,

则四边形 OCMF 为平行四边形,

$\because OC=OB=6$ ,

$\therefore \triangle OCB$  为等腰直角三角形,

$\therefore \angle OBC=45^\circ$ ,

$\therefore \angle HOF=45^\circ$ ,

$\therefore \triangle OHF$  为等腰直角三角形,

$\therefore HO=HF$ ,

设 F 点坐标为  $(m, -m)$  ( $m>0$ ),

把 F  $(m, -m)$  代入  $y=\frac{1}{3}x^2$  得  $-m=\frac{1}{3}m^2$ , 解得  $m_1=0, m_2=-3$ ,

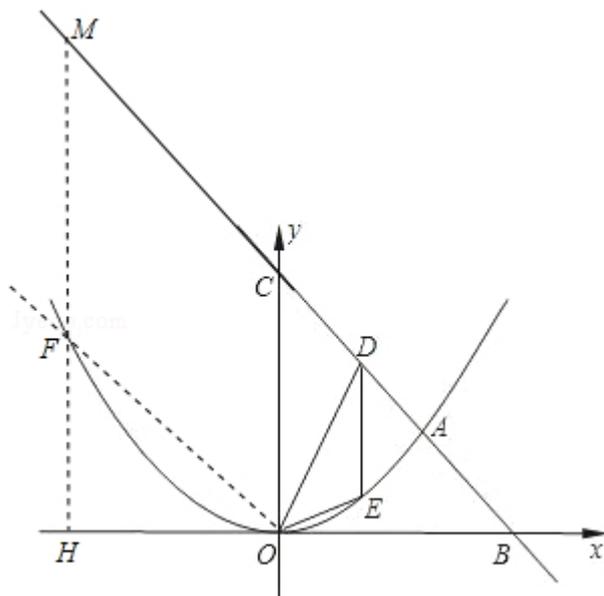
$\therefore m=-3$ ,

$\therefore HO=HF=3$ ,

$\therefore OF=\sqrt{2}OH=3\sqrt{2}$ ,

而  $OC=6$ ,

$\therefore$  四边形 OCMF 不为菱形.



## 第 15 讲 二次函数的图像与性质

### 【例题剖析】

例 1、解：(1)  $\because$  二次函数  $y=a(x+m)^2$  的顶点坐标为  $(-1, 0)$ ,

$$\therefore m=1,$$

$$\therefore \text{二次函数 } y=a(x+1)^2,$$

把点 A  $(-2, -\frac{1}{2})$  代入得  $a=-\frac{1}{2}$ ,

则抛物线的解析式为:  $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ .

$$(2) \text{ 把 } x=2 \text{ 代入 } y=-\frac{1}{2}(x+1)^2 \text{ 得 } y=-\frac{9}{2} \neq -2,$$

所以, 点 B  $(2, -2)$  不在这个函数的图象上;

$$(3) \text{ 根据题意设平移后的解析式为 } y=-\frac{1}{2}(x+1+m)^2,$$

$$\text{把 B } (2, -2) \text{ 代入得 } -2=-\frac{1}{2}(2+1+m)^2,$$

解得  $m=-1$  或  $-5$ ,

所以抛物线向左平移 1 个单位或平移 5 个单位函数, 即可过点 B.

例 2、解：(1)  $\because$  二次函数  $y=x^2+bx+c$  的图象经过 x 轴上点 A  $(1, 0)$  和点 B  $(3, 0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} 1+b+c=0 \\ 9+3b+c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases},$$

$\therefore$  此二次函数的解析式为  $y=x^2-4x+3$ .

$$\therefore -\frac{b}{2a}=2, \frac{4ac-b^2}{4a}=-1,$$

$\therefore$  顶点 P 的坐标为  $(2, -1)$ .

$$(2) \because y=x^2-4x+3,$$

$\therefore$  当  $x=0$  时,  $y=3$ .

$\therefore$  点 C 的坐标为  $(0, 3)$ .

又  $\because$  点 P 的坐标为  $(2, -1)$ , 点 B 的坐标为  $(3, 0)$ ,

$$\therefore PB = \sqrt{(3-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$PC = \sqrt{2^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore PB^2 + BC^2 = PC^2,$$

$$\therefore \angle PBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle CPB = \frac{BC}{PC} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

例 3、解：(1)  $O(0, 0)$ ,  $A(6, 0)$ ,  $M(3, 3)$ .

(2) 设抛物线的关系式为  $y = a(x - 3)^2 + 3$ ,

因为抛物线过点  $(0, 0)$ ,

所以  $0 = a(0 - 3)^2 + 3$ ,

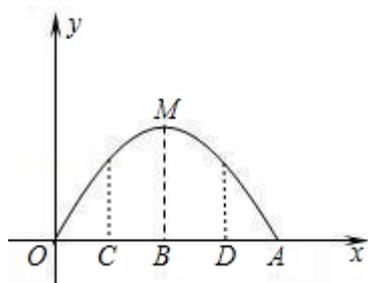
解得  $a = -\frac{1}{3}$ ,

所以  $y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 3 = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ ,

要使木板堆放最高, 依据题意, 得  $B$  点应是木板宽  $CD$  的中点,

把  $x=2$  代入  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ ,

得  $y = \frac{8}{3}$ , 所以这些木板最高可堆放  $\frac{8}{3}$  米.



**【经典习题】**

(A) 组

1. A.      2. B.      3. D.      4. D.      5. C.      6. B.

7. B.      8. 右.      9.  $x=4$ .      10.  $x=-1$ .      11.  $x=\frac{3}{2}$ .

12. 17.      13. 11.      14.  $6\sqrt{7}$ .

**(B) 组**

15、解：  $y = -2x^2 + 6x + 4$

$$= -2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 4 + \frac{9}{2},$$

$$= -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2} = -2\left[x + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + \frac{17}{2},$$

开口向下，对称轴为直线  $x = \frac{3}{2}$ ，顶点  $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right)$ 。

16、(1) 证明：  $\Delta = (m - 2)^2 - 4 \times (-1) \times (m + 1)$

$$= m^2 + 8,$$

$$\because m^2 \geq 0,$$

$$\therefore m^2 + 8 > 0, \text{ 即 } \Delta > 0,$$

$\therefore$  不论  $m$  取任何实数，这个二次函数的图象必与  $x$  轴有两个交点；

(2) 解：设二次函数的图象与  $x$  轴有两个交点坐标为  $(x_1, 0)$ ， $(x_2, 0)$ ，则  $x_1$  和  $x_2$  为关于  $x$  的方程  $-x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$  的两不等实数根，且  $x_1 < 0$ ， $x_2 < 0$ ，

$$\therefore x_1 + x_2 = m - 2 < 0, \quad x_1 \cdot x_2 = -(m + 1) > 0,$$

$$\therefore m < -1;$$

即  $m < -1$  时，这两个交点都在原点的左侧；

(3) 根据题意得  $x = -\frac{m-2}{2 \times (-1)} = 0$ ,

解得  $m = 2$ ，

即  $m = 2$  时，这个二次函数的图象的对称轴是  $y$  轴。

**(C) 组**

17、解：(1) 因各点坐标都关于  $y$  轴对称，可以设特殊点坐标。由抛物线的函数解析式为  $y =$

$$-x^2 + c,$$

$$\because AB = BC,$$

设  $AB = a$ ，则  $FE = \frac{a}{5}$ ，

又  $\because$  抛物线关于  $y$  轴对称，

故可设  $B\left(\frac{a}{2}, a\right)$ ,  $F\left(\frac{a}{10}, \frac{6}{5}a\right)$  代入  $y = -x^2 + c$  得: 
$$\begin{cases} -\frac{a^2}{4} + c = a \\ -\frac{a^2}{100} + c = \frac{6}{5}a \end{cases},$$

即 
$$\begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ c = \frac{145}{144} \end{cases}.$$

抛物线解析式中常数  $c$  的值为  $\frac{145}{144}$ .

(2)  $\because$  正方形  $ABCD$  的边长和正方形  $EFGH$  的边长之比为  $5:1$ , 即  $FG = \frac{1}{5}BC = \frac{a}{5}$ ,

$\therefore F\left(\frac{a}{10}, \frac{a}{5} + a\right)$ .

设  $MN = NP = b$ , 则  $N\left(\frac{b}{2}, b + \frac{6}{5}a\right)$ ,

$\because a = \frac{5}{6}$ , 代入  $y = -x^2 + \frac{145}{144}$

$\therefore b + 1 = -\frac{b^2}{4} + \frac{145}{144}$

$\therefore$  正方形  $MNPQ$  的边长  $b = \frac{\sqrt{145}}{6} - 2$ .

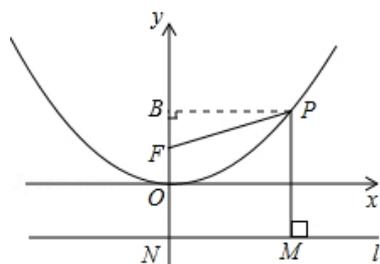
18、解: (1)  $\because$  抛物线  $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 1$  的顶点为  $(-2, -1)$

$\therefore$  抛物线  $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 1$  的图象向上平移 1 个单位, 再向右 2 个单位得到抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2$

的图象.

(2) ①存在一定点  $F$ , 使得  $PM = PF$  恒成立.

如图一, 过点  $P$  作  $PB \perp y$  轴于点  $B$



(图一)

设点 P 坐标为  $(a, \frac{1}{4}a^2)$

$$\therefore PM=PF=\frac{1}{4}a^2+1$$

$$\because PB=a$$

$\therefore$  Rt $\triangle$ PBF 中

$$BF=\sqrt{PF^2-PB^2}=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+1)^2-a^2}=\frac{1}{4}a^2-1$$

$$\therefore OF=1$$

$\therefore$  点 F 坐标为  $(0, 1)$

②由①,  $PM=PF$

QP+PF 的最小值为 QP+QM 的最小值

当 Q、P、M 三点共线时, QP+QM 有最小值为点 Q 纵坐标 5.

$\therefore$  QP+PF 的最小值为 5.

## 第 16 讲 二次函数的图像与性质综合

### 【例题剖析】

例 1、解: (1) 设抛物线的解析式为  $y=ax^2+bx+c$ ,

把  $(-1, 3)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 6)$  代入解析式得,

$$3=a-b+c \text{①},$$

$$3=a+b+c \text{②},$$

$$6=4a+2b+c \text{③},$$

解由①②③组成的方程组得,  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $c=2$ .

所以二次函数的解析式为  $y=x^2+2$ .

$$(2) \text{ 设 } y=a(x+1)^2+9,$$

把  $(0, -8)$  代入解析式得,  $a=-17$ ,

$$\therefore y=-17(x+1)^2+9=-17x^2-34x-8,$$

所以二次函数的解析式为  $y=-17x^2-34x-8$ .

(3)  $\because$  对称轴是直线  $x=1$ , 与  $x$  轴的一个交点为  $(-2, 0)$ ,

∴与 x 轴的另一个交点为 (4, 0),

设  $y=a(x+2)(x-4)$ ,

把 (0, 12) 代入解析式得,  $a=-\frac{3}{2}$ ,

$$\therefore y=-\frac{3}{2}(x+2)(x-4)=-\frac{3}{2}x^2+3x+12,$$

所以二次函数的解析式为  $y=-\frac{3}{2}x^2+3x+12$ .

(4) 设  $y=a(x-2)^2-5$ ,

把 (0, 0) 代入解析式得,  $a=\frac{5}{4}$ ,

$$\therefore y=\frac{5}{4}(x-2)^2-5=\frac{5}{4}x^2-5x,$$

所以二次函数的解析式为  $y=\frac{5}{4}x^2-5x$ .

(5) 设  $y=a(x+1)(x+3)$ ,

根据题意可得对称轴为直线  $x=-2$ , 又函数有最小值  $-5$ ,

∴顶点坐标为  $(-2, -5)$ , 代入解析式得,  $a=-5$ .

$$\therefore y=-5(x+1)(x+3)=-5x^2-20x-15,$$

所以二次函数的解析式为  $y=-5x^2-20x-15$ .

(6) ∵当  $x=2$  时, 函数的最大值是 1, 即顶点坐标为  $(2, 1)$ ,

∴抛物线的对称轴为直线  $x=2$ , 而图象与 x 轴两个交点之间的距离为 2, 则交点坐标分别为

$(1, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,

设  $y=a(x-1)(x-3)$ ,

把  $(2, 1)$  代入解析式得,  $a=-1$ ,

$$\therefore y=-(x-1)(x-3)=-x^2+4x-3,$$

所以二次函数的解析式为  $y=-x^2+4x-3$ .

例 2、解: (1) ∵ $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$  中当  $x=0$  时,  $y=\frac{5}{3}$ ,

∴出手点 A 离地面的高度为:  $\frac{5}{3}m$ ;

$$(2) \therefore y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3},$$

$$= -\frac{1}{12}(x^2 - 8x) + \frac{5}{3},$$

$$= -\frac{1}{12}(x - 4)^2 + 3.$$

∴最高点 C 离地面的高度为：3m；

(3) 当  $y=0$  时， $-\frac{1}{12}(x - 4)^2 + 3 = 0$ ,

解得： $x_1 = -2$ ， $x_2 = 10$ ，

∵ $x > 0$ ，∴取  $x = 10$ ，

∴运动员投铅球的成绩是 10 米.

例 3、解：(1) 由题意，得 C (0, 3) (1 分)

在 Rt△AOC 中， $\angle AOC = 90^\circ$ ，

$$\because \cot \angle OCA = \frac{OC}{OA} = 3$$

∴OA=1，

∴A (1, 0) (2 分)

∵点 A 在抛物线  $y = ax^2 + 2ax + 3$  上，

∴ $a + 2a + 3 = 0$  (1 分)

解得  $a = -1$  (1 分)

∴抛物线的解析式是  $y = -x^2 - 2x + 3$  (1 分)

(2) ∵抛物线  $y = -x^2 - 2x + 3$  的对称轴是直线  $x = -1$  (1 分)

又 A (1, 0)

∴点 B (-3, 0) (1 分)

∵四边形 OBFE 是平行四边形

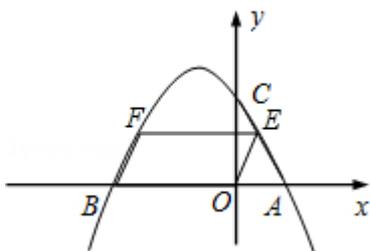
∴EF=OB=3，

∴点 E 的横坐标为  $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ . (1 分)

设点 E ( $\frac{1}{2}$ , y) (1 分)

∴ $y = -(\frac{1}{2})^2 - 2 \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{4}$  (1 分)

∴点E( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{7}{4}$ ) (1分)



**【经典习题】**

**(A) 组**

1、C    2、B    3、D    4、B    5、D    6、B    7、B

8、 $y=2x^2+8x+11$ .    9、 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$  或  $y=\frac{1}{2}x^2-3x$ .    10、 $2\sqrt{17}$ .

11、2.    12、 $x_1=-2$ ,  $x_2=1$ .    13、 $-1 \leq t < 8$ .

**(B) 组**

14、解：(1) M (12, 0), P (6, 6)

(2) ∵顶点坐标 (6, 6)

∴设  $y=a(x-6)^2+6$  ( $a \neq 0$ )

又∵图象经过 (0, 0)

∴ $0=a(0-6)^2+6$

∴  $a=-\frac{1}{6}$

∴这条抛物线的函数解析式为  $y=-\frac{1}{6}(x-6)^2+6$ , 即  $y=-\frac{1}{6}x^2+2x$ ;

(3) 设 A (x, y)

∴A ( $x, -\frac{1}{6}(x-6)^2+6$ )

∵四边形 ABCD 是矩形,

∴ $AB=DC=-\frac{1}{6}(x-6)^2+6$ ,

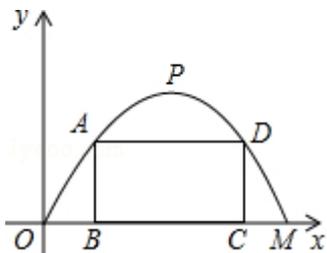
根据抛物线的轴对称性, 可得:  $OB=CM=x$ ,

∴ $BC=12-2x$ , 即  $AD=12-2x$ ,

$$\therefore \text{令 } L=AB+AD+DC=2\left[-\frac{1}{6}(x-6)^2+6\right]+12-2x=-\frac{1}{3}x^2+2x+12=-\frac{1}{3}(x-3)^2+15.$$

$\therefore$  当  $x=3$ ,  $L$  最大值为 15

$\therefore$  AB、AD、DC 的长度之和最大值为 15 米.



15、解：(1)  $\because$  四边形 ABCD 是矩形，

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=90^\circ$ ,  $CD=AB=6\text{cm}$ ,  $AD=BC=12\text{cm}$ ,

$$\begin{aligned} \therefore \triangle DMN \text{ 的面积} &= \text{矩形 ABCD 的面积} - \triangle ADM \text{ 的面积} - \triangle BMN \text{ 的面积} - \triangle CDN \text{ 的面积} \\ &= 12 \times 6 - \frac{1}{2} \times 12 \times t - \frac{1}{2} \times 2t(6-t) - \frac{1}{2} \times 6 \times (12-2t) = t^2 - 6t + 36, \end{aligned}$$

即  $s=t^2 - 6t + 36$ ;

$\therefore s=t^2 - 6t + 36 = (t-3)^2 + 27$ ,  $a=1 > 0$ ,

$\therefore S$  由最小值  $=27$ ;

(2) 当  $\triangle DMN$  为直角三角形时,  $\angle MND=90^\circ$ ,

$\therefore \angle BNM + \angle CND = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BNM + \angle BMN = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BMN = \angle CND$ ,

又  $\because \angle B = \angle C$ ,

$\therefore \triangle BMN \sim \triangle CND$ ,

$$\therefore \frac{BM}{CN} = \frac{BN}{CD},$$

$$\text{即 } \frac{6-t}{12-2t} = \frac{2t}{6},$$

$$\text{解得: } t = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S = \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 + 27 = 29\frac{1}{4},$$

即  $\triangle DMN$  的面积为  $29\frac{1}{4}$ .

(C) 组

16、解：(1) ∵对称轴为直线  $x = \frac{7}{2}$ ,

设所求抛物线的解析式为  $y = a(x - \frac{7}{2})^2 + b$ ,

$$\text{则由题意可得: } \begin{cases} \frac{25}{4}a + b = 0 \\ \frac{49}{4}a + b = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{25}{6} \end{cases},$$

∴所求抛物线的解析式为:  $y = \frac{2}{3}(x - \frac{7}{2})^2 - \frac{25}{6} = \frac{2}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 4$ ,

顶点坐标为:  $(\frac{7}{2}, -\frac{25}{6})$ ;

(2) ∵点 E (x, y) 在抛物线上, 位于第四象限, 且坐标适合  $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 4$ ,

∴  $y < 0$ ,

即  $-y > 0$ ,  $-y$  表示点 E 到 OA 的距离.

∵OA 是平行四边形 OEAF 的对角线,

$$\therefore S = 2S_{\triangle OAE} = 2 \times \frac{1}{2} \times OA \cdot |y| = -6y = -6 \left( \frac{2}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 4 \right) = -4x^2 + 28x - 24,$$

自变量 x 的取值范围为:  $1 < x < 6$ ;

(3) 根据题意得:  $-4x^2 + 28x - 24 = 24$ ,

解得  $x_1 = 3, x_2 = 4$ ,

∴所求的点 E 有两个, 分别为  $E_1(3, -4), E_2(4, -4)$ ,

∵点  $E_1(3, -4)$ ,

$$\therefore OE = 5, AE = \sqrt{(3-6)^2 + (-4-0)^2} = 5,$$

∴  $OE = AE$ ,

∴平行四边形 OEAF 是菱形,

∵点  $E_2(4, -4)$ ,

$$\therefore OE = 4\sqrt{2}, AE = \sqrt{(4-6)^2 + (-4-0)^2} = 2\sqrt{5},$$

∴ 不满足 OE=AE,

∴ 平行四边形 OEAF 不是菱形,

综上所述, 当点 E 坐标为 (3, -4) 时, 平行四边形 OEAF 为菱形.

17、解: (1) 抛物线与 y 轴交于点 C (0, -6),

∴ c = -6;

而抛物线过点 A (-6, 0)、B (2, 0),

$$\therefore \begin{cases} 36a-6b-6=0; \\ 4a+2b-6=0 \end{cases}$$

解得  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 2$ ,

即此抛物线的函数表达式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ ;

它的对称轴为直线  $x = -2$ ;

(2) ∵ A、B 关于对称轴直线  $x = -2$  对称, M 在对称轴上,

∴ AM=BM;

所以当点 A, M, C 共线时,  $\triangle MBC$  的周长最小;

直线 AC 的解析式是:  $y = -x - 6$ ,

令  $x = -2$ , 得  $y = -4$ ,

即点 M 的坐标为 (-2, -4);

(3) 点 P (0, k) 为线段 OC 上的一个不与端点重合的动点,

∴  $-6 < k < 0$ ;

∵ PD // CM,

∴  $\angle ODP = \angle OAC$ ,  $\angle OPD = \angle OCA$ ,

∴  $\triangle ODP \sim \triangle OAC$ ,

$$\therefore \frac{OD}{OA} = \frac{OP}{OC},$$

而 OA=OC,

∴ OD=OP, 即 D (k, 0);

∴  $\triangle MPD$  的面积  $S = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle AMD} - S_{\triangle MCP} - S_{\triangle POD}$ ;

$$\text{即 } S = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times (6+k) \times 4 - \frac{1}{2} \times (6+k) \times 2 - \frac{1}{2} \times |k|^2 = -\frac{1}{2}k^2 - 3k;$$

