答案

第 1 讲 初高中衔接课程

一元二次方程根的判别式和根与系数关系

二、例题分析

例 1. 关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 的一根为 2，求另一根和 m 的值。

解析：由韦达定理可得 $x_1+x_2=-p=2$ 则另一根为 2-2=0；

$x_1x_2=q=m$，则 m=0。

答案：另一根为 0，m=0

例 2. 已知 α,β 是方程 $2x^2-3x-1=0$ 的两根，不解方程，求下列各式的值。

（1）$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$　　（2）$(\alpha+1)(\beta+1)$

（3）$\alpha^2+\beta^2$　　（4）$|\alpha-\beta|$

（5）$\alpha^3+\beta^3$

解析：根据韦达定理得 $\alpha+\beta=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$，$\alpha\beta=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$；则

（1）$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3$

（2）$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1=2$

（3）$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$

（4）$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\frac{9}{4}+2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

（5）$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\frac{3}{2}\times(\frac{13}{4}+\frac{1}{2})=\frac{45}{8}$

答案：（1）-3；（2）2；（3）$\frac{13}{4}$；（4）$\frac{\sqrt{17}}{2}$；（5）$\frac{45}{8}$。

例 3. 已知 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $x^2+px-p^2=0$ 的两个实数根且 $x_1x_2-x_1-x_2=0$。

（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）求 p 的值。

解析：（1）要说明方程总有两个实数根，即说明 $\Delta\geq 0$ 即可；

（2）根据跟与系数的关系有 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=-p^2$。

答案：（1）$\because \Delta=p^2-(-4p^2)=5p^2$

而 $\Delta=5p^2\geq 0$，

$\therefore$ 方程总有两个实数根

（2）由 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=-p^2$，

且 $x_1x_2-x_1-x_2=0$，

$\therefore -p=-p^2$

解得 $p=0或p=1$

例 4. **已知关于 x 的二次方程 $x^2-2(a-2)x+a^2-5=0$ 有实数根，且两根之积等于两根之和的 2 倍，求 a 的值。**

解析：用韦达定理时要注意根是否存在，即 $\Delta \geq 0$。

答案：由题意得 $a^2-5=4(a-2)$，解得 $a=1或a=3$

又 $\Delta=4(a-2)^2-4(a^2-5)\geq 0$，解得 $a\leq\dfrac{9}{4}$

所以 $a=3$ 舍去，即 $a=1$。

例 5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k+1=0$ 的两根的平方和小于 5，求 k 的取值范围。

解析：运用韦达定理构造平方和，同时一定要注意两根的存在条件，即 $\Delta\geq 0$

答案：设方程的两个根分别为 x_1,x_2

由韦达定理得，$x_1+x_2=3$，$x_1\cdot x_2=k+1$

因为 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=32-2(k+1)<5$

所以 $k>1$　(1)

又因为 $\Delta=-3\cdot 2-4(k+1)\geq 0$

所以 $k\leq\dfrac{5}{4}$　（2）

综上（1）（2）得，$1<k\leq\dfrac{5}{4}$

例 6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m-2)x+\dfrac{1}{2}m-3=0$

（1）求证：无论 m 取什么实数值，这个方程总是有两个不相等的实数根。

（2）若这个方程的两个实数根 x_1,x_2 满足 $2x_1+x_2=m+1$，求 m 的值。

解析：方程根的情况可以用判别式 Δ 进行判定，求 m 的值可以根据韦达定理。

答案：（1）方程有两个不相等的实数根，则判别式 $\Delta>0$,即

$\Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4(\dfrac{1}{2}m-3)$

$=m^2-6m+16=(m-3)^2+7>0$ 恒成立

所以无论 m 取何值 Δ 大于零恒成立,方程恒有两个不相等的实数根.

（2）根据韦达定理得到：$\begin{cases}x_1+x_2=-(m-2)\\2x_1+x_2=m+1\end{cases}$

解方程组，$\begin{cases}x_1=2m-1\\x_2=3-3m\end{cases}$

又因为 $x_1x_2=\dfrac{1}{2}m-3$，所以有 $\dfrac{1}{2}m-3=(2m-1)(3-3m)$，

解这个方程得 $m=1或\dfrac{1}{2}$

三、基础训练

1.

答案：（1）是　（2）是　（3）不是

2. 答案：$-\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$

3.答案：$p=-1,q=-3$

4. 答案：$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

5. 答案：$m=-3$

6.答案：$m=-4,n=-29$

第 2 讲 集合及其表示方法

二、例题分析

例 1．下列对象的全体，哪些可构成集合

1） 上海中学年纪较大的老师 否

2） 很接近 0 的数字 否

3） 著名的足球运动员 否

4） 绝对值最小的实数 是 {0}

例 3. D 试一试：C

例 4. A 试一试：答案：S={2，3，4，7}

例 5. （1）{0，2，4，6，8} （2）{2，3，5，7} （3）{-3，5}

例 6. （1）$\{x\,|\,x=2k,k\in Z\}$； （2）$\{(x,y)\,|\,x=0,y\in R\}$两个都是无限集

例 7. 解：1）当$k=-1$时，x=−1 符合题意

2）当$k\neq-1$时 $(k+1)x^2+x-k=0$ 有唯一解

$$\therefore \Delta=1+4k(k+1)=0$$

$$k=-\frac{1}{2}$$

综上 $k=-1$ 或 $k=-\dfrac{1}{2}$

例 8．解：$\because 5\in A$

$\therefore 1)\quad 2a+1=5\quad \therefore a=2$ 此时$A=\{3,5,12\}$ 符合题意

$2)\ a^2+4a=5\quad (a-1)(a+5)=0\quad \therefore a=1$或$-5$

当$a=1$时 A={3,3,5} 不符，舍

当$a=-5$时，$A=\{3,-9,5\}$

综上 a=2 或 a=-5

五、回家作业

1. 答案：$\in$ $\notin$ $\notin$ $\in$ $\in$ $\notin$

2. （1）答案：$\{2\}$（2）答案：$\{12,14,15,16,18\}$

3. 用描述法表示下列集合：

（1）答案：$\{x \mid x=5k+1, k \in \mathbf{N}\}$

（2）答案：$\{(x,y) \mid xy>0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$

（3）答案：$\{(x,y) \mid y=2x^2-x+1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$

（4）答案：$\left\{x \middle| x=\dfrac{n}{n+2}, n \in \mathbf{N}^*, n \le 5\right\}$

4. 用列举法表示下列集合：

（1）答案：$\{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$

（2）答案：$\{3,-1\}$

（3）答案：$\varnothing$

（3）答案：$\{-7,-1,1,3,4\}$

5. 答案：由已知得：$B=\{1，-2\}$ ∵ $A \subseteq B$，∴ $A=\varphi$或$A=\{1\}$或$A=\{-2\}$，由$A=\varphi$得$a=0$；由$A=\{1\}$得$a=-1$；由$A=\{-2\}$得$a=1/2$。∴ a的值为 0 或-1 或 1/2。

第 3 讲 集合之间的包含关系

二、例题分析

例 1. 略

例 2. （1）A=B（2）A 包含 B

（1）$A=\{n|n$ 为 12 的正约数$\}$与 $B=\{1,2,3,4,6,12\}$

（2）$C=\{m|m=2k,\ k \in N^+\}$与 $D=\{m|m$ 为 4 的正整数倍数$\}$.

例 3. m=0 或 1/3 或 -1/2

例 4. a = -1 或 2

例 5.（1） m 大于等于 3 （2）$\frac{1}{2} \le a \le 1$

例 6. x=2,y=3

第 4 讲 集合的运算

二、例题分析

题型 1：交集与并集的运算

例 1：解：$A \cap B=\{x \mid -1<x<0\}$

例 2：答案：$\left\{(1,0),(-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{9})\right\}$

（2）解：$M=\{y|y=x^2+1，x∈R\}=\{y|y≥1\}$．$N=\{y|y=x+1，x∈R\}=\{y|y∈R\}$．
∴$M∩N=\{y|y≥1\}∩\{y|y∈R\}=\{y|y≥1\}$． ∴应选 D．

例 3：解：∵A∩B={9}，A={-4，2m-1,m2}，B={9，m-5，1-m}，∴2m-1=9 或 m^2 =9，解得 m=5 或 m=3 或 m=-3.

若 m=5，则 A={-4，9，25}，B={9，0，-4}与 A∩B={9}矛盾；

若 m=3，则 B 中元素 m-5=1-m=-2，与 B 中元素互异矛盾；

若 m=-3，则 A={-4，-7，9}，B={9，-8，4}满足 A∩B={9}.∴m=-3。

例 4： 解：∵A∩B={1}　　∴1∈B　　∴$1^2-4\times1+r=0, r=3$.

∴B={x|$x^2-4x+r=0$}={1,3}，　∵A∪B={−2,1,3},−2∉B，∴−2∈A

∵A∩B={1}　　∴1∈A　　∴方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为-2 和 1，

$\therefore\ p=-(-2+1)=1, q=(-2)\cdot1=-2.\quad \therefore\ p=1, q=-2, r=3$

例 5： 解：（1）当 P＝∅ 时，有Δ＝（m＋2）^{2}－4＜0，解得－4＜m＜0.

（2）当 P≠∅ 时，有$\begin{cases}x_1+x_2=-(m+2)\le 0\\ x_1\cdot x_2=1>0\\ \Delta=(m+2)^2-4\ge 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}m\ge -2\\ m\ge 0\text{或}m\le -4\end{cases}$，得 m≥0

综上(1)(2)可知 m＞－4.

题型 2：全集与补集的运算

例 1： 解：$\because U=\{a,b,c,d,e,f\}, A=\{a,e,f\}, B=\{a,b,c,e\}$

$\therefore A\cup B=\{a,b,c,e,f\}, A\cap B=\{a,e\}$

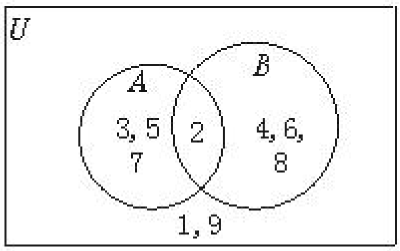
$C_UA=\{b,c,d\}$，$C_UB=\{d,f\}$；

$\therefore (C_UA)\cup(C_UB)=\{b,c,d,f\}$，$C_U(A\cap B)=\{b,c,d,f\}$；

例 2： 答案：（1）$\{x|x\le 2\}$；（2）$\{x|0\le x\le 2\}$；（3）$\{2\}$

例 3： 答案：a=-1

例 4： 解：　由图可得 A＝{2，3，5，7}，B＝{2，4，6，8}.



例 5：

$\because 1\le a_1<a_2<a_3<a_4, \therefore a_1^2<a_2^2<a_3^2<a_4^2$,

$\because A\cap B=\{a_1,a_4\}, \therefore$ 只可能有 $a_1=a_1^2\Rightarrow a_1=1$,

而 $a_1+a_4=10, \therefore a_4=9, \therefore a_4^2\ne a_4$,

(1)若 $a_2^2=a_4$，则 $a_2=3, \therefore A\cup B=\{1,3,a_3,9,a_3^2,81\}$,

$\therefore a_3+a_3^2+94=124\Rightarrow a_3=5$;

(2)若 $a_3^2=a_4$，则 $a_3=3$，同样可得 $a_2=5>a_3$，与条件矛盾，不合；

综上，$A=\{1,3,5,9\}, B=\{1,9,25,81\}$.

三、基础训练

1. A
2. C
3. A

4. 答案：$\{(3,-1)\}$

5. 答案：$\{1,2,6\},\{1,2,3,5,6,7,8\}$

6. 答案：$q=-\dfrac{1}{2}$

7. 答案：26

8. 解：因为$(C_U A)\cap(C_U B)=\{1,9\}$，所以$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

因为 $A\cap B=\{2\}$，$(C_U A)\cap B=\{4,6,8\}$，

所以 $B=\{2,4,6,8\}$，$A=\{2,3,5,7\}$

9. 解：（1）$A\cup B=\{x|1\le x<10\}$

$(C_R A)\cap B=\{x|x<1$ 或 $x\ge 7\}\cap\{x|2<x<10\}$

$=\{x|7\le x<10\}$

（2）当 $a>1$ 时满足 $A\cap C\ne\varphi$

四、拓展提高

1. 答案：（1） $a\ge 3$；（2） $a<3$
2. 答案： $1\le a\le 5$
3. 答案： $-3\le a\le -2$
4. 答案：a=0, b=4

五、回家作业

1~12：DBBAA　DCDCA　DC

13．20　14．$a\le -2$　15。1，1；　16．$p>-4$

17．解 ∵$A\cap B=\{-2\}$，∴$-2\in A$，又∵$a^2+1>0$，∴$a^2-3=-2$，解得 $a=\pm1$

（1）当 $a=1$ 时，$A=\{-1,2,-2\}$，$B=\{-2,0,2\}$

则 $A\cap B=\{-2,2\}$与 $A\cap B=\{-2\}$矛盾，∴$a\ne1$.

（2）当 $a=-1$ 时，$A=\{-1,2,-2\}$，$B=\{-4,-2,0\}$，$A\cap B=\{-2\}$符合题意

此时 $A\cup B=\{-4,-2,-1,0,2\}$，又∵$U=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

∴$C_U(A\cup B)=\{-3,1,3,4\}$.

第 5 讲 命题的形式和等价关系

二、例题分析

题型 1：命题的判定、推出符号的运用

例 1. 答案：（1）

例 2. **答案：（1）** $\Rightarrow$；（2） $\Leftarrow$；（3） $\Leftrightarrow$；（4） $\Leftrightarrow$

题型 2：命题的四种形式及相互关系

例 3. 解：逆命题：若$a\le 0$或$b\le 0$, 则$ab\le 0$.逆命题是假

否命题：若 $ab>0$ 则$a>0$且$b>0$", 否命题是假

逆否命题：若 $a>0, b>0$", 则$ab>0$, 逆否命题是真。

例 4. 解：由命题 p 可以得到：$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0\\ m>0\end{cases}$　　$\therefore m>2$

由命题q可以得到：$\Delta=[4(m-2)]^2-16<0$　$\therefore -2<m<6$

$\because$ p 或q为真，p 且q为假　　p,q有且仅有一个为真

当 p 为真，q 为假时，$\begin{cases}m>2\\ m\le -2, or m\ge 6\end{cases}\Rightarrow m\ge 6$

当 p 为假，q 为真时，$\begin{cases}m\le 2\\ -2<m<6\end{cases}\Rightarrow -2<m\le 2$

所以，m 的取值范围为$\{m\,|\,m\ge 6$或$-2<m\le 2\}$.

题型 3：充分条件与必要条件

例 5. 答案：（1）必要非充分；（2）充分非必要；（3）既非充分又非必要；（4）充要；（5）必要非充分；（6）充分非必要

例 6. **解**：选 A 点评：推出关系满足传递性："若$\alpha\Rightarrow\beta$，$\beta\Rightarrow\gamma$，则$\alpha\Rightarrow\gamma$"

例 7.**答案：(1)**既不充分也不必要条件（用逆否命题帮助判断）

(2) $m=0$（所填范围只要在 $m\le\frac{1}{4}$ 的范围之类即可）

题型 4、子集与推出关系

例 8. 答案：（1）α 是 β 的充分非必要条件；（2）α 是 β 必要非充分条件；

例 9. 答案：（1）$-\frac{1}{2}\le m\le 0$；（2）$m\le -3$；

例 10. 答案：$-3\le m\le -\frac{1}{2}$；

例 11. 答案：α 是 β 的充分非必要条件；

三、基础训练

四、拓展提高

1. 已知 $a、b、c \in R$，“$b^2-4ac<0$”是“函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像恒在 x 轴上方”的（　　）

$A.$充分非必要条件　　　　$B.$必要非充分条件
$C.$充要条件　　　　$D.$既非充分又非必要条件

答案：D

2. 钱大姐常说“便宜没好货”，她这句话的意思是：“不便宜”是“好货”的（　　）

$A.$充分条件　　　　$B.$必要条件

$C.$充分必要条件　　　　$D.$既非充分也非必要条件

答案：B

3. 求证：二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$

证明：

（1）充分性　若 $a+b+c=0$ 将 $x=1$ 代入方程得 $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0$

所以 $x=1$ 是二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根．

（2）必要性　已知 $a+b+c=0$，则 $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0$，显然 1 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根．

4. 已知命题 p：方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解；命题 q：只有一个实数满足不等式 $x^2+2ax+2a\le 0$．若 p,q 都是假命题，求 a 的取值范围.

解：由 $a^2x^2+ax-2=0$ 知 $a\ne 0$，解此方程得 $x_1=\frac{1}{a}, x_2=-\frac{2}{a}$.

$\because$ 方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解，　$\therefore |\frac{1}{a}|\le 1$ 或 $|\frac{2}{a}|\le 1$，　$\therefore |a|\ge 1$.

只有一个实数满足不等式 $x^2+2ax+2a\le 0$，表明抛物线 $y=x^2+2ax+2a$ 与 x 轴只有一个

公共点，　$\therefore \Delta=4a^2-8a=0$，　$\therefore a=0$ 或 $a=2$.

∴命题 p 为假，则 $-1<a<1$；命题 q 为假，则 $a\neq 0$ 且 $a\neq 2$.

∴若 p,q 都是假命题，则 a 的取值范围是 $(-1,0)\cup(0,1)$.

五、回家作业

1. ②；2. 若 a,b 都不为零，则 $ab\neq 0$.　3. 当 $c>0$ 时，若 $a\leq b$，则 $ac\leq bc$；

4. A　5. A　6. 充分非必要条件；7. 充分非必要　8. $m=0$　9. A

10、假设 $a,b\in Q$, 可设 $a=\frac{m}{n},b=\frac{t}{s}(m,n,s,t\in Z,m\neq 0,s\neq 0)$，则 ab = $\frac{nt}{ms}$ $\in Q$，与

条

件矛盾，所以 a,b 至少有一个不是有理数“至少有一个不是”的否定是“都是”，本题不用直接证明而是证明逆否命题，其原因是：“不是有理数”不如“是有理数”容易用数学语言表达，“是有理数”即“可写成分数形式”

11、解：充分性：若 $ac<0$，则方程的 $\Delta>0$，方程有两个不同的实数根。

非必要性：当方程有两个不同的实数根，则 $\Delta>0$，而不仅仅是 $ac<0$。

1、(2)(3)对；(1)(4)错；2、A；3、C；4、A；5、C；6、B；7、C；
8、略；
9、(1)必要非充分；(2)非充分非必要；(3)充分非必要；(4)充要条件；(5)充分非必要；(6)必要非充分；
10、必要非充分；
11、答案：$xy>1$；12、A；13、(1)充分非必要；(2)充分非必要；(3)r 和 s 互为充要条件；

14、(1) $\begin{cases}b^2-4ac>0\\ \frac{c}{a}<0\end{cases}$；(2) $\begin{cases}b^2-4ac>0\\ \frac{c}{a}>0\\ -\frac{b}{a}>0\end{cases}$；(3) $\begin{cases}b^2-4ac>0\\ \frac{c}{a}>0\\ -\frac{b}{a}<0\end{cases}$；

(4) $\begin{cases}b^2-4ac>0\\ c=0\\ -\frac{b}{a}>0\end{cases}$；(5) $\begin{cases}b^2-4ac>0\\ -\frac{b}{2a}<2\\ f(2)>0\end{cases}$；

15、略；

第 6 讲 充分和必要条件、子集和推出的关系

一、知识梳理

（一）充分和必要条件

1、充分条件、必要条件：

一般的，如果命题α成立，可以推出命题β也成立，即$\alpha \Rightarrow \beta$，那么α叫做β的充分条件，同时β叫做α的必要条件（也就是说，为了使β成立，具备条件α就足够了）。

2、充分不必要条件、必要不充分条件：

一般的，如果命题α成立，可以推出命题β也成立，且命题β成立，推不出命题α成立，那么α叫做β的充分不必要条件，同时β叫做α的必要不充分条件。

3、充要条件：

如果既有$\alpha \Rightarrow \beta$，又有$\beta \Rightarrow \alpha$，即有$\alpha \Leftrightarrow \beta$，那么$\alpha$既是$\beta$的充分条件，又是$\beta$的必要条件，则称$\alpha$是$\beta$的充分且必要条件，简称充要条件。

（二）、子集与推出关系：

1、设$A=\left\{a \middle| a具有性质\alpha\right\}$，$B=\left\{b \middle| b具有性质\beta\right\}$，则$A \subseteq B \Leftrightarrow \alpha \Rightarrow \beta$。

2、子集与推出关系的各种表述形式：

已知集合$A=\{a \mid a具有性质\alpha\}, B=\{b \mid b具有性质\beta\}$

①若$A \subseteq B$, 则α是β的充分条件；　②若$A \subsetneqq B$, 则α是β的充分不必要条件；

③若$A \supseteq B$, 则α是β的必要条件；　④若$A \supsetneqq B$, 则α是β的必要不充分条件；

⑤若$A=B$，则α是β的充要条件；　⑥若$A \not\subset B, B \not\subset A$则$\alpha$是$\beta$的既不充分也不必要条件；

3、推出关系具有传递性：若$\alpha \Rightarrow \beta$，$\beta \Rightarrow \gamma$，则$\alpha \Rightarrow \gamma$，若$\alpha \Rightarrow \beta$，$\beta \Rightarrow \alpha$，则$\alpha \Leftrightarrow \beta$，称$\alpha$ 与β等价。

二、例题解析

题型 1.判断充分、必要条件

** 例 1：(1) 设全集为 U，则“$A \cap B = \phi$”的充要条件是“$A \cap C_U B =$ ________”.

(2)“$|x+y| = |x| + |y|$”是“$xy > 0$”的　　　　　　　　（　　）

（A）充要条件　　　　　　　　（B）充分非必要条件

（C）必要非充分条件　　　　　（D）既非充分又非必要条件

解：（1）$\cancel{A}$　　(2)　C

**例 2.（1）条件“$x \neq 3$或$y \neq 5$”是条件“$x + y \neq 8$”的什么条件?

（2）设 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数. 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为 M 和 N, 那么“$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$”是“$M = N$”的（　　）

（A）充分非必要条件　　　　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　　　　　　　（D）既非充分又非必要条件

解：（1）必要非充分条件　　（2）D

题型 2、写出符合要求的条件

***例 3.** （1）写出 $x > 0$ 的一个必要非充分条件；

（2）写出 $x > 0$ 的一个充分非必要条件。

解：（1）$x > -1$；（2）$x > 1$。

小结： 把充要条件中的条件范围缩小得到的条件是充分不必要条件;把充要条件中的条件范围扩大得到的条件是必要不充分条件.

****例 4.** 设 $A = \{y | y = x^2 - 4x + 6\}$，$B = \{x | x > a\}$，若 $B \subset A$；

（1）求 a 的取值范围;（2）写出它的一个充分非必要条件。

解：（1）由 $A=\left\{y\middle|y=x^2-4x+6\right\}=\left\{y\middle|y\ge 2\right\}$，且 $B\subset A\Rightarrow a<2$；

（2）$a<1$。

题型 3、求充要条件

***例 5. 已知实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\ne 0)$，“$b^2-4ac=0$”是“方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根”的什么条件？为什么？

解：方程 $ax^2+bx+c=0$ 变形为 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$；∵ $b^2-4ac=0$，∴ $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$，

∴“$b^2-4ac=0$”是“方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根”的充分条件；

反过来，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2$，那么根据方程根与系数关系得 $\begin{cases}x_1+x_2=2x_1=-\dfrac{b}{2a}\\ x_1x_2={x_1}^2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，∴ $b^2-4ac=0$；∴“$b^2-4ac=0$”是“方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根”的必要条件；

综上所述“$b^2-4ac=0$”是“方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根”的充要条件。

**例 6. 已知实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\ne 0\right)$，

试写出下列各条件的一个充要条件：

（1）方程有一个正根、一个负根；

（2）方程有两个正根；

（3）方程有两个不同负根；

（4）方程有一个正根、一个根为 0；

（5）方程有一个根大于 1、一个根小于 1。

解：（1）$ac<0$；（2）$b^2-4ac\ge 0,ab<0,ac>0$；（3）$b^2-4ac>0,ab>0,ac>0$；

（4）$c=0,ab<0$；（5）$\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)>0$。

题型 4、证明充要条件

**例 7. 求证：二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根 $x=1$ 的充要条件是 $a+b+c=0$。

证：（1）充分性：若 $a+b+c=0 \Rightarrow b=-(a+c)$，代入 $ax^2+bx+c=0$ 得：

$$ax^2-(a+c)x+c=0 \Rightarrow (x-1)(ax-c)=0 \Rightarrow x=1\text{是方程的根；}$$

（2）必要性：若 $x=1$ 是方程的根，用 $x=1$ 代入应满足方程，得 $a+b+c=0$。

$\therefore$ 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根 $x=1$ 的充要条件是 $a+b+c=0$。

****例 8. 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α,β，证明："$|\alpha|<2$ 且 $|\beta|<2$" 是 "$2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$" 的充要条件.

证明：论证充分性和必要性

题型 5、子集与推出关系

***例 9. 设 $\alpha:-1<x<2$；$\beta:x^2-x-2a^2=0$，若 α 是 β 的必要条件，求实数 a 的取值范围。

解：由 $x^2-x-2a^2=0 \Rightarrow x_1=-a$，$x_2=2a$；

（1）若 $a>0 \Rightarrow -1<-a<2a<2 \Rightarrow 0<a<1$；

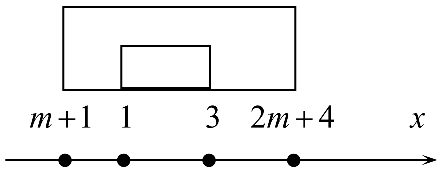
（2）若 $a<0 \Rightarrow -1<2a<-a<2 \Rightarrow -\frac{1}{2}<a<0$；

（3）若 $a=0 \Rightarrow x_1=0$，$x_2=1 \Rightarrow -1<x_1<x_2<2$；

故：当 $-\frac{1}{2}<a<1$ 时，α 是 β 的必要条件。

**例 10. 设 $\alpha:1\le x\le 3,\beta:m+1\le x\le 2m+4,m\in R$，$\alpha$ 是 β 的充分条件，求 m 的范围。

解：设 $A=\{x\,|\,1\le x\le 3\}$，$B=\{x\,|\,m+1\le x\le 2m+4\}$　因为 α 是 β 的充分条件，即 $\alpha\Rightarrow\beta$，所以 $A\subseteq B$



由右图可得 $\begin{cases} m+1\le 1 \\ 3\le 2m+4 \end{cases}$，解得 $-\frac{1}{2}\le m\le 0$

所以 m 的取值范围是 $-\frac{1}{2}\le m\le 0$。

***例 11.**设$\alpha: 2 \le x < 3, \beta: x \le m-1 或 x > m+1, m \in R$，$\alpha$ 是 β 的充分条件，求 m 的范围。

解：设 $A=\{x \mid 2 \le x < 3\}$，$B=\{x \mid x \le m-1 或 x > m+1, m \in R\}$

α 是 β 的充分条件，即 $\alpha \Rightarrow \beta$，$\therefore A \subseteq B$

画数轴分析可得 $m-1 \ge 3$ 或 $m+1<2$，解得 $m \ge 4$ 或 $m<1$

所以 m 的取值范围是 $m \ge 4$ 或 $m<1$。

三、基础训练

*1. $x>0$，且 $y>0$ 的一个必要非充分条件是（ B ）

A）$xy=0$　　B）$x+y>0$　　C）$x=1, y=1$　　D）$x-y>0$

*2.试用子集与推出的关系来说明 α 是 β 的什么条件。

（1）$\alpha: x=1$ 且 $y=2$；　$\beta: x+y=3$

（2）$\alpha: a+b>0$；　$\beta: a>0, b>0$

（3）$\alpha: xy>0$ ；　$\beta: |x+y|=|x|+|y|$

解：（1）充分非必要条件；（2）必要非充分条件；（3）充分非必要条件

**3.从“充分而不必要条件”，“必要而不充分条件”或“充要条件”中选出适当的一种填空：

（1）$x \in A \cap B$ 是 $x \in A$ 的____________；

（2）$x \in A \cup B$ 是 $x \in B$ 的____________；

（3）$x \in (\complement_U A)$ 是 $x \in U$ 的________________；

（4）$x \in (\complement_U A) \cup A$ 是 $x \in A$ 的________________；

（5）“$A=\varnothing$”是“$A \cup B = B$”的________________；

（6）.“$A \subsetneqq B$”是“$A \cap B = A$”的______________；

（7）“$x \in A$”是“$x \in A \cap B$”的_________________；

（8）“四边形的对角线互相垂直平分”是“四边形为矩形”的______________；

（9）“四边形内接于圆”是“四边形对角互补”的________________；

（10）设 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 的半径为 r_1，r_2，则“$O_1O_2 = r_1 + r_2$”是“两圆外切”的______

________.

答案：（1）充分不必要条件　　（2）必要不充分条件 .（3）充分不必要条件

（4）必要不充分条件　（5）充分不必要条件　（6）充分不必要条件

（7）必要而不充分条件　　（8）既不充分也不必要条件　　（9）充要条件

（10）充要条件.

*4. 写出命题 $p:(x-1)(x+2)<0$ 的一个必要不充分条件________。 答案：$x\le -2$（答案不唯一）

**5. 命题 $A:|x-1|<3$，命题 $B:(x+2)(x+a)<0$；若 A 是 B 的充分而不必要条件，则实数 a 的取值范围是______________答案：$a<-4$

**6. 集合 $A=\{x|-2<x<5\}$，集合 $B=\{x|m+1\le x\le 2m-1\}$，若 $B\subseteq A$，且 B 为非空集合，则 m 的取值范围为 ______________.　　　答案：$[2,3)$

***7. 求方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件.

答案：$0<a\leqslant 1$.

***8. 已知 $a,b\in R$，求证："关于 x 的不等式 $ax+b>0$ 对一切实数 x 都成立"的充要条件是：$a=0,b>0$。

证明：证明充分性和必要性

四、拓展提高

*1. "$x_1>3$ 且 $x_2>3$" 是 "$x_1+x_2>6$ 且 $x_1x_2>9$" 的充要条件吗？若是，请说明理由；若不是，请给出 "$x_1>3$ 且 $x_2>3$" 的充要条件.

答案：不是充要条件；$\begin{cases}(x_1-3)(x_2-3)>0\\ x_1+x_2>6\end{cases}$.

***2. 已知关于 x 的一元二次方程：$(1)mx^2-4x+4=0,(2)x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$

求方程（1）和（2）都有整数解的充要条件。（$m\in Z$）

解：（1）有解，则 $m\le 1$，（2）有解，则 $m\ge -\dfrac{5}{4}$，又 $m\in Z$，$m=-1,0,1$

检验后：$m=1$

***3.已知 $p:\left\{x\left|\begin{cases}x+2\ge 0\\ x-10\le 0\end{cases}\right.\right\}$，$q:\{x|1-m\le x\le 1+m, m>0\}$，若$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

解：由题知：$p:P=\{x|-2\le x\le 10\}$，$q:Q=\{x|1-m\le x\le 1+m, m>0\}$

$\because$ $\neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件，$\therefore$ q 是 p 的必要不充分条件. $\therefore$ $P \subsetneqq Q$，即$\begin{cases}1-m\le -2,\\ 1+m\ge 10,\\ m>0.\end{cases}$得 $m\ge 9$.

故 m 的取值范围为 $m\ge 9$.

**4.已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$，$a\in R$. 求：

（1）方程有两个正根的充要条件；

（2）方程至少有一个正根的充要条件.

解：（1）方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$ 有两个正根的充要条件 $\begin{cases}1-a\ne 0,\\ \Delta\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne 1,\\ a\le 2\text{或}\ge 10.\end{cases}$

设此时方程的两实根为 x_1，x_2，则 x_1，x_2 的正数的充要条件是 $\begin{cases}x_1+x_2>0,\\ x_1x_2>0.\end{cases}\Leftrightarrow a>1$.

综上，方程有两个正根的充要条件为$1<a\le 2$或$a\ge 10$.

（2）①方程有两个正根，由（1）知$1<a\le 2$或$a\ge 10$.

②当$a=1$时，方程化为$3x-4=0$，有一个正根$x=\dfrac{4}{3}$.

③$\because$ 方程无零根，故方程有一正根，一负根的充要条件是$\begin{cases}1-a\ne 0,\\ \Delta\ge 0,\\ x_1x_2<0.\end{cases}$ 即$a<1$.

综上，方程至少有一正根的充要条件是$a\le 2$或$a\ge 10$.

五、回家作业

1. 设集合$M=\{x\,|\,0<x\le 3\}$，$N=\{x\,|\,0<x\le 2\}$，则"$a\in M$"是"$a\in N$"的必要不充分条件.

2. 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. 那么 p 是 q 的：

（　A　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

3. 函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 过原点的充要条件是 $\underline{c=0}$.

4. 若 $x\in R$，则 $x>1$ 的一个必要不充分条件是 $\underline{x>0}$.

5. 用“充分不必要条件，必要不充分条件，充要条件和既不充分也不必要条件”填空.

（1）$\begin{cases}x>2,\\ y>2.\end{cases}$是$\begin{cases}x+y>4,\\ xy>4.\end{cases}$的__________________条件；

（2）$(x-4)(x+1)\geq 0$ 是 $\dfrac{x-4}{x+1}\geq 0$ 的__________________条件；

（3）$x+y\neq 3$ 是 $x\neq 1$ 或 $y\neq 2$ 的__________________条件.

解：（1）因为$\begin{cases}x>2,\\ y>2.\end{cases}$结合不等式性质易得$\begin{cases}x+y>4,\\ xy>4.\end{cases}$，反之不成立，若 $x=\dfrac{1}{2}$， $y=10$，

有$\begin{cases}x+y>4,\\ xy>4.\end{cases}$，但$\begin{cases}x>2,\\ y>2.\end{cases}$不成立，所以$\begin{cases}x>2,\\ y>2.\end{cases}$是$\begin{cases}x+y>4,\\ xy>4.\end{cases}$的充分不必要条件.

（2）因为 $(x-4)(x+1)\geq 0$ 的解集为 $[-1,4]$， $\dfrac{x-4}{x+1}\geq 0$ 的解集为 $(-1,4]$，故 $(x-4)(x+1)\geq 0$ 是 $\dfrac{x-4}{x+1}\geq 0$ 的必要不充分条件.

（3）原问题等价其逆否形式，即判断“$x=1$ 且 $y=2$ 是 $x+y=3$ 的____条件”，故 $x+y\neq 3$ 是 $x\neq 1$ 或 $y\neq 2$ 的充分不必要条件.

6. 已知命题“$a\geq b\Rightarrow c>d$” 和“$a<b\Leftrightarrow e\leq f$”都是真命题，则“$c\leq d$”是“$e\leq f$ 的_________条件。

解：由“$a\geq b\Rightarrow c>d$” $\Leftrightarrow$ “$c\leq d\Rightarrow a<b$”，且 $a<b\Leftrightarrow e\leq f$，即：$c\leq d\Rightarrow a<b\Leftrightarrow e\leq f$，

∴应为充分条件。

7. 设集合 $M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，则“$x\in(M\cup P)$”是“$x\in(M\cap P)$”的<u>　必要不充分　</u>条件.

8. 已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的

必要条件。现有下列命题：

①s 是 q 的充要条件；② p 是 q 的充分条件而不是必要条件；③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件；④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件；⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件，其中正确命题序号是____①②④____.

【能力提高】

9．已知条件 $p:A=\{x\in R|x^2+ax+1\le 0\}$，条件 $q:B=\{x\in R|x^2-3x+2\le 0\}$．若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围．

解：$q:B=\{x\in R|1\le x\le 2\}$，若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件，则 $A\subseteq B$．

若 $A=\varnothing$，则 $a^2-4<0$，即 $-2<a<2$；

若 $A\ne\varnothing$，则 $\begin{cases} a^2-4\ge 0, \\ \dfrac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}\le x\le\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}, \end{cases}$ 解得 $-\dfrac{5}{2}\le a\le -2$．

综上所述，$-\dfrac{5}{2}\le a<2$．

第 7 讲　不等式的基本性质

一、知识梳理

1、不等式公理

我们知道，实数与数轴上的点是一一对应的。在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大。

在右图中，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b，点 A 在点 B 右边，那么 a＞b。

而 a－b 表示 a 减去 b 所得的差，由于 a＞b，则差是一个正数，即 a－b＞0。

命题：“若 a＞b，则 a－b＞0”成立；逆命题“若 a－b＞0，则 a＞b”也正确。

类似地：若 a＜b，则 a－b＜0；若 a＝b，则 a－b＝0。逆命题也都正确。

结论：(1)“a＞b” ⇔ “a－b＞0”

(2)“a＝b” ⇔ “a－b＝0”

(3)“a＜b” ⇔ “a－b＜0”——以上三条即为比较大小的依据：“作差比较法”。

正负数运算性质：

(1) 正数加正数是正数；(2) 正数乘正数是正数；(3) 正数乘负数是负数；(4) 负数乘负

数是正数。

2、不等式的基本性质

(1) 如果 $a>b$，那么 $b<a$，如果 $b<a$，那么 $a>b$．（对称性）

(2) 如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$．（传递性）

(3) 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$． 即 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$。

(4) 如果 $a>b$，且 $c>d$，那么 $a+c>b+d$．（相加法则）

(5) 如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$；

如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$

(6) 如果 $a>b>0$，且 $c>d>0$，那么 $ac>bd$．（相乘法则）

(7) 若 $a>b>0$，则 $a^n>b^n(n\in N$ 且 $n>1)$

(8) 若 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N$ 且 $n>1)$

二、例题解析

题型 1、利用不等式的性质判断

***例** 1、若 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是（　　）

A．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B．$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　C．$|a|>|b|$　　D．$a^2>b^2$

解：$\because a<b<0$，$\therefore -a>-b>0$。由 $\frac{1}{-a}<\frac{1}{-b}$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$\therefore$（A）成立。

由 $a<b<0$，$|a|>|b|$，$\therefore$（C）成立。

由 $-a>-b>0$，$(-a)^2>(-b)^2$，$a^2>b^2$，$\therefore$（D）成立。

$\because a<b<0$，$a-b<0$，$a<a-b<0$，$-a>b-a>0$，

$\frac{1}{-a}<\frac{1}{-(a-b)}$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{a-b}$，$\therefore$（B）不成立。故应选 B。

***例** 2、判断下列命题是否正确，并说明理由。

（1）若 $a<b<0$，则 $a<b<0$；（2）若 $a<b<0$，则 $a<b<0$；

（3）$a<b<0$，$a<b<0$，则 $a<b<0$；（4）若 $a<b<0$，则 $a<b<0$。

解：（1）错误。当 $c=0$ 时不成立。

（2）正确。$\because c^2 \neq 0$ 且 $c^2 > 0$，在 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$ 两边同乘以 c^2，不等式方向不变。$\therefore a > b$。

（3）错误。$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$，成立条件是 $ab > 0$。

（4）错误。$a > b$，$c > d \Leftrightarrow ac > bd$，当 a，b，c，d 均为正数时成立。

**例 3、若 $a > b > 0$，$c < d < 0$，$e < 0$，求证：$\frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}$。

解：$\because c < d < 0$，$-c > -d > 0$，又 $a > b > 0$ $\quad \therefore a-c > b-d > 0$，故 $\frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-d}$。

而 $e < 0$，$\therefore \frac{e}{a-c} > \frac{e}{b-d}$

**例 4、判断下列各命题的真假，并说明理由.

（1）若 $ac^2 > bc^2$，则 $a > b$.　　（2）若 $a > b$，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

（3）若 $a < b, c < 0$，则 $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$.　　（4）若 $a > b, c > d$，则 $a-c > b-d$.

（5）若 $a > b > 0, a > c$，则 $a^2 > bc$.　　（6）若 $a > b, m \in N^*$，则 $a^m > b^m$.

解：（1）真命题　（2）假命题　（3）假命题　（4）假命题　（5）真命题　（6）假命题

说明：在利用不等式的性质解题时，一定要注意性质定理成立的条件．要说明一个命题是假命题可通过举反例.

**例 5、已知三个不等式：① $ab > 0$；② $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}$；③ $bc > ad$。以其中两个作条件，余下一个作结论，则可组成__________个正确命题。

解：对命题②作等价变形：$\frac{c}{a} > \frac{d}{b} \Leftrightarrow \frac{bc-ad}{ab} > 0$

于是，由 $ab > 0$，$bc > ad$，可得②成立，即①③$\Rightarrow$②；

若 $ab > 0$，$\frac{bc-ad}{ab} > 0$，则 $bc > ad$，故①②$\Rightarrow$③；

若$bc > ad$，$\frac{bc-ad}{ab} > 0$，则$ab > 0$，故②③⇒①。

∴可组成3个正确命题。

题型2、利用性质求不等式范围

**例6、已知①$-1 \le a+b \le 1$；②$1 \le a-b \le 3$，求：$3a-b$的取值范围.

解：设：$3a-b = x(a+b)+y(a-b) = (x+y)a+(x-y)b$

$\therefore \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

由①+②×2得：$-1+2 \le (a+b)+2(a-b) \le 1+3\times 2$ 即：$1 \le 3a-b \le 7$.

说明：此题的一种典型错误做法，如下：

$\because -1 \le a+b \le 1, 1 \le a-b \le 3,$ $\therefore 0 \le 2a \le 4$，即：$0 \le a \le 2$ $\because$ $-1 \le a+b \le 1$，$-3 \le b-a \le -1$ $\therefore$ $-4 \le 2b \le 0$

即：$-2 \le b \le 0$，$\therefore 0 \le 3a \le 6$，$0 \le -b \le 2$，$\therefore 0 \le 3a-b \le 8$

此解法的错误原因是因为a与b是两个相互联系，相互制约的量，而不是各自独立的，当$a+b$取到最大值或最小值时，$a-b$不一定能取到最值，所以用以上方法可能扩大变量的范围.

题型3、比较大小

*例7、比较x^2+y^2 与$xy+x+y-1$的大小

解：$x^2+y^2 \ge xy+x+y-1$ 当且仅当取“=”号

**例8、比较x^6+1与x^4+x^2的大小，其中$x \in R$

解：$(x^6+1)-(x^4+x^2) = x^6-x^4-x^2+1$，

$= x^4(x^2-1)-(x^2-1) = (x^2-1)(x^4-1)$，

$= (x^2-1)(x^2-1)(x^2+1) = (x^2-1)^2(x^2+1)$，

∴ 当$x = \pm 1$时，$x^6+1 = x^4+x^2$；

当 $x \neq \pm 1$ 时，$x^6+1>x^4+x^2$.

说明：两个实数比较大小，通常用作差法来进行，其一般步骤是：第一步：作差；第二步：变形，常采用配方，因式分解等恒等变形手段；第三步：定号，贵州省是能确定是大于0，还是等于0，还是小于0．最后得结论．概括为“三步，—结论”，这里的“变形”一步最为关键．

***例 9、若 m＞0，y＞x＞0，试比较 $\frac{x+m}{y+m}$ 与 $\frac{x}{y}$ 的大小。

解：$\frac{x+m}{y+m}-\frac{x}{y}=\frac{(x+m)y-(y+m)x}{(y+m)y}=\frac{m(y-x)}{(y+m)y}$

∵y＞x ∴y－x＞0　　∵y＞0，m＞0 ∴y＋m＞0

又∵y＞0，m＞0　∴ $\frac{m(y-x)}{(y+m)y}>0$　则 $\frac{x+m}{y+m}>\frac{x}{y}$

**例 10、甲、乙两人连续两天去市场买青菜。甲每次买青菜的数量不变，乙每次买青菜的费用不变。问甲、乙两人谁购买的方法比较合算？

解：设第一天青菜单价 a 元/斤，第二天青菜单价 b 元/斤。

设甲每次买青菜 x 斤，乙每次买青菜花费 y 元，

∴甲平均单价为 $\frac{ax+bx}{2x}=\frac{a+b}{2}$，乙平均单价为 $\frac{2y}{\frac{y}{a}+\frac{y}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$

∵ $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

∴(1) a＝b 时，$\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}$；(2) a≠b 时，$\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$

由(1)(2)可知：乙购买的方法比较合算。

题型 4、解含参不等式

**例 11、解关于 x 的不等式 m(x＋2)＞x＋m。

解：(m－1) x＞－m

(1)当 m＝1 时，x∈R

(2)当 m＜1 时，$x<-\frac{m}{m-1}$；

(3)当 m＞1 时，$x>-\frac{m}{m-1}$

反思：(1) 引起讨论的原因是什么？——m－1 值的不确定性

(2) 如何进行讨论？——不等式性质

三、基础训练

*1、已知非零实数 a,b 满足 $a>b$，则下列不等式成立的是（　D　）

A）$a^2>b^2$　　B）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C）$a^2b>ab^2$　　D）$\frac{a}{b^2}>\frac{b}{a^2}$

*2、已知 $a,b,c,d\in R$，则下列选项正确的是（　C　）

A． $a>b\Rightarrow am^2>bm^2$　　B． $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$　　C． $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

D. $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

*3、已知 a,b 都是实数，那么“$a^2>b^2$”是“$a>b$”的__既不充分也不必要___条件。

**4、若 $-1<\alpha<\beta<1$，则下面各式中恒成立的是（　A　）.

（A）$-2<\alpha-\beta<0$　（B）$-2<\alpha-\beta<-1$　（C）$-1<\alpha-\beta<0$　（D）$-1<\alpha-\beta<1$

解：即 $-1<\alpha<1$，$-1<\beta<1$ 和 $\alpha<\beta$，根据不等式的性质，可得 $-1<-\beta<1$，$\alpha-\beta<0$，继而得到

$-2<\alpha-\beta<2$ 且 $\alpha-\beta<0$，故 $-2<\alpha-\beta<0$，因此选 A.

*5、比较 a^2+b^2 与 $2a-8b-17$ 的大小

解：$a^2+b^2\geq 2a-8b-17$ 当且仅当 $\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}$ 取“=”号

**6、已知 $-1\leq x+y\leq 1$，$1\leq x-y\leq 3$，则 $3x-y$ 的取值范围是______（答：$[1,7]$）

**7、对于实数 a,b,c 中，给出下列命题：

①若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$；②若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$；③若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$；

④若 $a<b<0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；⑤若 $a<b<0$,则 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$；⑥若 $a<b<0$,则 $|a|>|b|$；⑦若 $c>a>b>0$,则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$；　⑧若 $a>b,\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0,b<0$。

其中正确的命题是______（答：②③⑥⑦⑧）

**8、实数 a、b、c、d 满足条件：① $a<b,c<d$；② $(a-c)(b-c)>0$；③ $(a-d)(b-d)<0$，则有（ D ）

A. $a<c<d<b$　　B. $c<a<b<d$　C. $a<c<b<d$　　D. $c<a<d<b$

**9、解关于 x 的不等式：$(m^2-4)x<m+2$。

解：(1) $m^2-4=0$ 即 $m=-2$ 或 $m=2$

①当 $m=-2$ 时，$x\in\varnothing$

②当 $m=2$ 时，$x\in R$

(2) $m^2-4>0$ 即 $m<-2$ 或 $m>2$ 时，$x<\dfrac{1}{m-2}$

(3) $m^2-4<0$ 即 $-2<m<2$ 时，$x>\dfrac{1}{m-2}$

反思：(1) 引起讨论的原因是什么？——m^2-4 值的不确定性

(2) 如何进行讨论？——不等式性质

四、拓展提高

**1、如果 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $2\alpha-\beta$ 的取值范围是__________。

解：由
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}-\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<\dfrac{\pi}{2}\\-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow-\pi<\alpha-\beta<\pi\\\alpha<\beta\Rightarrow\alpha-\beta<0\end{array}\right\}\Rightarrow-\pi<\alpha-\beta<0\\\\-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow-\dfrac{3}{2}\pi<2\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$；$\therefore 2\alpha-\beta$ 的取值范围是：$\left(-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。

***2、已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$, 则 $\dfrac{c}{a}$ 的取值范围是______（答：$\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$）

***3、若不等式 $|3x-b|<4$ 的解集中的整数有且仅有 $1,2,3$，则 b 的取值范围__________。

解：由 $|3x-b|<4\Leftrightarrow\dfrac{b-4}{3}<x<\dfrac{b+4}{3}$；由条件知：$\begin{cases}0\le\dfrac{b-4}{3}<1\\3<\dfrac{b+4}{3}\le4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4\le b<7\\5<b\le8\end{cases}$

$\Rightarrow 5<b<7$，$\therefore b$ 的取值范围是：$(5,7)$。

***4、设互不相等的正数 a,b,c 满足 $a^2+c^2=2bc$，则下列不等式中可能成立的是（　B　）

A）$a>b>c$　　B）$b>a>c$　　C）$b>c>a$　　D）$c>a>b$

解：由 $2bc=a^2+c^2>2ac\Rightarrow b>a$，$\therefore$A）D）不正确；

若 $c>a\Rightarrow 2bc=a^2+c^2<2c^2\Rightarrow b<c$，则B）C）均不正确，$\therefore c<a$，$\therefore b>a>c$；

$\therefore$B）正确。

5 $a>b>c$，则 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}$ ＿＿＿ $\frac{3}{a-c}$。（填“＞”“=”“＜”）

解：由 $a>b>c\Rightarrow\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)(a-c)=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\left[(a-b)-(b-c)\right]$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{(a-b)(b-c)}}\cdot 2\sqrt{(a-b)(b-c)}=4\text{；}$$

$\therefore \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{4}{a-c}>\frac{3}{a-c}$。

五、回家作业

1、若 $a>b>c$，则一定成立的不等式是（　C　）

A．$a|c|>b|c|$　　B．$ab>ac$　　C．$a-|c|>b-|c|$　　D．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

2、若 $a<b<0$，则下列不等式一定成立的是（　D　）

A．$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{b}$　　B．$a^2<ab$　　C．$a^a>b^a$　　D．$|\frac{b}{a}|<\frac{|b|+1}{|a|+1}$

3、已知 $a>b>0$，则下列不等式中总成立的是（　A　）

A．$a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$　　B．$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$　　C．$\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$

D. $b-\frac{1}{b}>a-\frac{1}{a}$

4、已知四个条件：（1）$b>0>a$；（2）$0>a>b$；（3）$a>0>b$；（4）$a>b>0$；

能推出$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的有_________个。

解：（1）（2）（4）能推出$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，而 （3）不能，∴能推出$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的有3个。

5、求证：$a>b,\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow a>0,b<0.$

证明： 利用不等式的性质，得 $\left.\begin{array}{l} a>b\Rightarrow a-b>0 \\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{a}<0\Rightarrow \frac{a-b}{ab}<0 \end{array}\right\}\Rightarrow ab<0$ ，

$\left.\begin{array}{l} a,b\text{异号} \\ a>b \end{array}\right\}\Rightarrow a>0,b<0.$

6、比较$(a+1)^2$与a^2-a+1的值的大小。

解：$(a+1)^2-(a^2-a+1)=3a$

(1)当$a<0$时，$(a+1)^2<a^2-a+1$

(2)当$a=0$时，$(a+1)^2=a^2-a+1$

(3)当$a>0$时，$(a+1)^2>a^2-a+1$

反思：(1)比较大小时，等与不等一定要分开讨论！

(2)分类讨论时，要做到“不遗漏，不重复”！

7、如果一辆汽车每天行驶的路程比原来多$19km$，那么在8天内它的行程就超过$2200km$，如果它每天行驶的路程比原来少$12km$，那么它行驶同样的路程得花9天多的时间，这辆汽车原来每天行驶的路程(km)范围是_________。

解：设汽车每天行驶x，∴ $\begin{cases} 8(x+19)>2200 \\ 9(x-12)<8(x+19) \end{cases}\Rightarrow 256<x<260$；

∴汽车原来每天行驶的路程(km)范围是：$(256,260)$。

8、二次函数$f(x)$图像关于y轴对称，且$1\le f(1)\le 2$，$3\le f(2)\le 4$，求$f(3)$的范围。

解：设$f(x)=ax^2+c$（$a\neq 0$）。$\begin{cases} f(1)=a+c \\ f(2)=4a+c \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{f(2)-f(1)}{3} \\ c=\frac{4f(1)-f(2)}{3} \end{cases}$

$f(3)=9a+c=3f(2)-3f(1)+\dfrac{4f(1)-f(2)}{3}=\dfrac{8f(2)-5f(1)}{3}$

$\because 1\le f(1)\le 2$，$3\le f(2)\le 4$，

$\therefore 5\le 5f(1)\le 10$，$24\le 8f(2)\le 32$，$14\le 8f(2)-5f(1)\le 27$，

$\therefore \dfrac{14}{3}\le\dfrac{8f(2)-5f(1)}{3}\le 9$，即$\dfrac{14}{3}\le f(3)\le 9$。

第 8 讲　一元二次不等式的解法

一、知识梳理

（一）一元二次方程与二次函数

1、一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0\,(a\ne 0)$ ①其中a,b,c为常数，x为未知数。

根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$，求根公式：在$\Delta\ge 0$时，方程①的实根$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

一元二次方程根的个数与根的判别式的关系：

（1）$\Delta<0$时，方程①无实根；

（2）$\Delta=0$时，方程①有且只有一个实根，或者说方程①有两个相等的实根；

（3）$\Delta>0$时，方程①有两个不相等的实根。

2、二次函数的一般形式：形如$y=ax^2+bx+c\,(a\ne 0)$其中a,b,c为常数，x为自变量。

顶点坐标为$P\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，其中直线$x=-\dfrac{b}{2a}$为对称轴，

（1）$a<0$时，函数$y=ax^2+bx+c$的图象开口向下，函数$y=ax^2+bx+c$在$x=-\dfrac{b}{2a}$

取到最大值，即$y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，对任意$x\in R,y\le\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

（2）$a>0$时，函数$y=ax^2+bx+c$的图象开口向上，函数$y=ax^2+bx+c$在$x=-\dfrac{b}{2a}$

取到最小值，即 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，对任意 $x\in R, y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

3、二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴交点个数的判断：

（1）$\Delta<0$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴无交点；

（2）$\Delta=0$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴相切，有且只有一个交点；

（3）$\Delta>0$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴有两个交点。

（二）一元二次不等式

1、一元二次不等式的定义

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式。比如：$x^2-5x<0$.

任意的一元二次不等式，总可以化为一般形式：$ax^2+bx+c>0\left(a>0\right)$ 或 $ax^2+bx+c<0\left(a>0\right)$

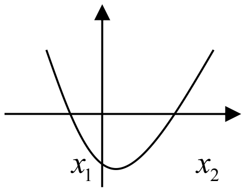
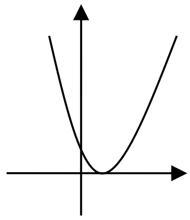
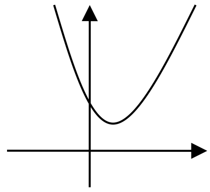
2、一般的一元二次不等式的解法

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0\left(<0\right)\left(a>0\right)$ 的解集可以联系二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 的图像，图像在 x 轴上方部分对应的横坐标 x 值的集合为不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集，图像在 x 轴下方部分对应的横坐标 x 值的集合为不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 的两根为 x_1、x_2 且 $x_1\leq x_2$，$\Delta=b^2-4ac$，则相应的不等式的解集的各种情况如下表：

三个两次（一元二次方程、一元二次不等式、二次函数）之间的关系

Δ 三个二次	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

$y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 图像			
$ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ 根	$x=x_1$或$x=x_2$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无 解
$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$ 解集	$\{x\|x<x_1$或$x>x_2\}$	$\left\{x\middle\|x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0\ (a>0)$ 解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geq0\ (a>0)$ 解集	$\{x\|x\leq x_1$或$x\geq x_2\}$	R	R
$ax^2+bx+c\leq0\ (a>0)$ 解集	$\{x\|x_1\leq x\leq x_2\}$	$\left\{x\middle\|x=-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$\varnothing$

注意：

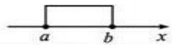
（1）一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根 x_1、x_2 是相应的不等式的解集的端点的取值，是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点的横坐标；

（2）表中不等式的二次系数均为正，如果不等式的二次项系数为负，应先利用不等式的性质转化为二次项系数为正的形式，然后讨论解决；

（3）解集分 $\Delta>0,\Delta=0,\Delta<0$ 三种情况，得到一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 与 $ax^2+bx+c<0$ 的解集。

3、区间的表示

设 a,b 均为实数，且 $a<b$，

含　义	名　称	区 间 表 示	数 轴 表 示
$\{x\|a\leq x\leq b\}$	闭 区 间	$[a,b]$	
$\{x\|a<x<b\}$			

$\{x\|a<x\le b\}$			
$\{x\|a\le x<b\}$			
R			
$\{x\|x>a\}$			
$\{x\|x\ge a\}$			
$\{x\|x<a\}$			
$\{x\|x\le a\}$			

①其中，a，b 叫做相应区间的__________。

②符号“∞”读作____________,“＋∞”读作____________,“－∞”读作 ____________。

4、解一元二次不等式的步骤

（1）先看二次项系数是否为正，若为负，则将二次项系数化为正数；

（2）写出相应的方程 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$，计算判别式 Δ：

①$\Delta>0$ 时，求出两根 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$（注意灵活运用因式分解和配方法）；

②$\Delta=0$ 时，求根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；

③$\Delta<0$ 时，方程无解

（3）根据不等式，写出解集.

规律方法指导

（1）解一元二次不等式首先要看二次项系数 a 是否为正；若为负，则将其变为正数；

（2）若相应方程有实数根，求根时注意灵活运用因式分解和配方法；

（3）写不等式的解集时首先应判断两根的大小，若不能判断两根的大小应分类讨论；

（4）根据不等式的解集的端点恰为相应的方程的根，我们可以利用韦达定理，找到不等式的解集与其系数之间的关系；

（5）若所给不等式最高项系数含有字母，还需要讨论最高项的系数。

二、例题解析

*例 1、解下列一元二次不等式

（1）$x^2-5x<0$；（2）$x^2-4x+4>0$；（3）$-x^2+4x-5>0$

解：（1）$\{x|0<x<5\}$　（2）$\{x|x\neq 2\}$　（3）$\varnothing$

*例 2、解下列不等式

(1) $2x^2-3x-2>0$；(2) $-3x^2+6x-2>0$　(3) $4x^2-4x+1\le 0$；(4) $-x^2+2x-3>0$.

解：（1）$\{x|x<-\frac{1}{2}或x>2\}$　（2）$(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3})$.　**（3）**$\{\frac{1}{2}\}$.　**（4）**$\varnothing$.

**例 3、解不等式：$-6\le x^2-x-6<6$

解：原不等式可化为不等式组$\begin{cases}x^2-x-6<6\\-6\le x^2-x-6\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2-x-12<0\\x^2-x\ge 0\end{cases}$，即$\begin{cases}(x-4)(x+3)<0\\x(x-1)\ge 0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}-3<x<4\\x\ge 1或x\le 0\end{cases}$，$\therefore$原不等式的解集为$\{x|-3<x\le 0或1\le x<4\}$.

**例 4、不等式$x^2+mx-n<0$的解集为$x\in(4,5)$，求关于x的不等式$nx^2+mx-1>0$的解集。

解：由题意可知方程$x^2+mx-n=0$的两根为$x=4$和$x=5$

由韦达定理有$4+5=-m$，$4\times 5=-n$　$\therefore m=-9$，$n=-20$

$\therefore nx^2+mx-1>0$化为$-20x^2-9x-1>0$，即$20x^2+9x+1<0$

$(4x+1)(5x+1)<0$，解得$-\frac{1}{4}<x<-\frac{1}{5}$，

故不等式$nx^2+mx-1>0$的解集为$(-\frac{1}{4},-\frac{1}{5})$.

变式：若关于x的不等式$ax^2+bx+6>0$的解集为（-3,5），求a,b

解：$a=-\dfrac{2}{5},b=\dfrac{4}{5}$

**例5、已知关于 x 的不等式$(m^2+4m-5)x^2-4(m-1)x+3>0$对一切实数 x 恒成立，求实数 m 的取值范围。

解：(1)当 $m^2+4m-5=0$ 时，m=1 或 m=-5

若 m=1，则不等式化为 3>0，对一切实数 x 成立，符合题意。

若 m=-5，则不等式为 24x+3>0，不满足对一切实数 x 均成立，所以 m=-5 舍去。

(2)当 $m^2+4m-5\neq 0$ 即 $m\neq 1$ 且 $m\neq -5$ 时，

由此一元二次不等式的解集为 R 知，抛物线 $y=(m^2+4m-5)x^2-4(m-1)x+3$ 开口向上，且与 x 轴无交点，

所以$\begin{cases} m^2+4m-5>0 \\ \Delta=16(m-1)^2-12(m^2+4m-5)<0 \end{cases}$，

即$\begin{cases} m>1\text{或}m<-5 \\ 1<m<19 \end{cases}$， ∴ 1<m<19。

综上所述，实数 m 的取值范围是{m|1≤m<19}。

**例6、若关于x的不等式$mx^2-(2m+1)x+m-1\ge 0$的解集为空集，求m的取值范围.

解：关于x的不等式$mx^2-(2m+1)x+m-1\ge 0$的解集为空集 即$mx^2-(2m+1)x+m-1<0$的解集为 R

当$m=0$时，原不等式为：$-x-1\ge 0$，即$x\le -1$，不符合题意，舍去.

当$m\neq 0$时，原不等式为一元二次不等式，只需$m<0$且$\Delta<0$，

即$\begin{cases} (2m+1)^2-4m(m-1)<0 \\ m<0 \end{cases}$，解得$m<-\dfrac{1}{8}$，

综上，m的取值范围为：$m\in(-\infty,-\dfrac{1}{8})$.

**例7、解关于x的一元二次不等式$x^2-(3+a)x+3a>0$。

解：由$x^2-(3+a)x+3a>0\Leftrightarrow(x-3)(x-a)>0$；

（1）当$a<3$时，解集是：$(-\infty,a)\cup(3,+\infty)$；

（2）当$a=3$时，解集是：$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$；

（3）当$a>3$时，解集是：$(-\infty,3)\cup(a,+\infty)$。

******例 8**、解关于 x 的不等式：$ax^2-2(a+1)x+4<0$。

解：由$ax^2-2(a+1)x+4<0\Leftrightarrow(ax-2)(x-2)<0$，且$2-\dfrac{2}{a}=\dfrac{2(a-1)}{a}$；

（1）当$a>1$时，$2>\dfrac{2}{a}$，$\therefore$解集是：$\left(\dfrac{2}{a},2\right)$；

（2）当$a=1$时，$2=\dfrac{2}{a}$，$\therefore$解集是：ϕ；

（3）当$0<a<1$时，$2<\dfrac{2}{a}$，$\therefore$解集是：$\left(2,\dfrac{2}{a}\right)$；

（4）当$a=0$时，$x>2$，$\therefore$解集是：$(2,+\infty)$；

（5）当$a<0$时，$(-ax+2)(x-2)>0$，$\therefore$解集是：$\left(-\infty,\dfrac{2}{a}\right)\cup(2,+\infty)$。

三、基础训练

*1、不等式$x^2>x$的解集是__________。

解：由$x^2>x\Leftrightarrow x<0或x>1$，$\therefore$解集是：$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$。

**2、不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$，对一切$x\in R$恒成立，则a的取值范围______。

解：（1）当$a=2$时，显然成立；

（2）当$a\neq2$时，$\therefore\begin{cases}a-2<0\\ \Delta<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<2\\ -2<a<2\end{cases}\Rightarrow-2<a<2$；

$\therefore$由（1）（2）知a的取值范围是：$(-2,2]$。

*3、解下列不等式：

(1) $-2x^2-5x+3>0$；

(2) $-1\leqslant x^2+2x-1\leqslant2$；

解 (1)$\{x|-3<x<\frac{1}{2}\}$;(2)$\{x|-3\leqslant x\leqslant -2$ 或 $0\leqslant x\leqslant 1\}$

**4、不等式 $ax^2+4x+a>1-2x^2$ 对一切 $x\in \mathbf{R}$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

解: $(2,+\infty)$

**5、已知 $ax^2+2x+c>0$ 的解为 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$,试求 a、c,并解不等式 $-cx^2+2x-a>0$.

解:由韦达定理有:$-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{a}$,$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{c}{a}$,$\therefore a=-12$,$c=2$.

$\therefore$代入不等式 $-cx^2+2x-a>0$ 得 $-2x^2+2x+12>0$,

即 $x^2-x-6<0$,$(x-3)(x+2)<0$,解得 $-2<x<3$,

故不等式 $-cx^2+2x-a>0$ 的解集为:$(-2,3)$.

**6、解关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$.

解:原不等式可化为 $(x-a)(x-1)<0$.

当 $a>1$ 时,原不等式的解集为 $(1,a)$;

当 $a=1$ 时,原不等式的解集为空集;

当 $a<1$ 时,原不等式的解集为 $(a,1)$.

***7、若关于 x 的不等式 $mx^2-(2m+1)x+m-1\geq 0$ 的解为一切实数,求 m 的取值范围.

解:当 $m=0$ 时,原不等式为:$-x-1\geq 0$,即 $x\leq -1$,不符合题意,舍去.

当 $m\neq 0$ 时,原不等式为一元二次不等式,只需 $m>0$ 且 $\Delta\geq 0$,

即 $\begin{cases}(2m+1)^2-4m(m-1)\geq 0\\ m>0\end{cases}$,解得 $m>0$,

综上,m 的取值范围为:$m\in(0,+\infty)$.

**8、若关于 x 的不等式 $mx^2-(2m+1)x+m-1\geq 0$ 的解集为非空集,求 m 的取值范围.

解:当 $m=0$ 时,原不等式为:$-x-1\geq 0$,即 $x\leq -1$,符合题意.

当 $m>0$ 时,原不等式为一元二次不等式,显然也符合题意

当 $m<0$ 时,只需 $\Delta\geq 0$,即 $\begin{cases}(2m+1)^2-4m(m-1)\geq 0\\ m<0\end{cases}$,解得 $-\frac{1}{8}\leq m<0$,

综上,m 的取值范围为:$m\in[-\frac{1}{8},+\infty)$.

**9、已知方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两根为$-\frac{1}{2}$和 2．

(1)求 a、b 的值；

(2)解不等式 $ax^2+bx-1>0$．

解：(1)∵方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两根为$-\frac{1}{2}$和 2，由根与系数的关系，得$\begin{cases}-\frac{1}{2}+2=-\frac{b}{a}\\-\frac{1}{2}\times 2=\frac{2}{a}\end{cases}$，

解得 $a=-2$，$b=3$．

(2)由(1)知，$ax^2+bx-1>0$ 变为$-2x^2+3x-1>0$，即 $2x^2-3x+1<0$，解得$\frac{1}{2}<x<1$．

∴不等式 $ax^2+bx-1>0$ 的解集为$\{x|\frac{1}{2}<x<1\}$．

四、拓展提高

**1、若关于 x 的不等式$\frac{ax}{x-1}<1$ 的解集是$\{x|x<1$ 或 $x>2\}$，求实数 a 的值．

解：$\frac{ax}{x-1}<1\Leftrightarrow\frac{(a-1)x+1}{x-1}<0\Leftrightarrow[(a-1)x+1](x-1)<0$，由原不等式的解集是$\{x|x<1$ 或 $x>2\}$，

知$\begin{cases}a-1<0,\\-\frac{1}{a-1}=2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$．

**2、求不等式 $12x^2-ax>a^2(a\in\mathbf{R})$的解集．

解：∵$12x^2-ax>a^2$，∴$12x^2-ax-a^2>0$，即$(4x+a)(3x-a)>0$，令$(4x+a)(3x-a)=0$，

得：$x_1=-\frac{a}{4}$，$x_2=\frac{a}{3}$．

①$a>0$ 时，$-\frac{a}{4}<\frac{a}{3}$，解集为$\{x|x<-\frac{a}{4}$或 $x>\frac{a}{3}\}$；

②$a=0$ 时，$x^2>0$，解集为$\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$；

③$a<0$ 时，$-\frac{a}{4}>\frac{a}{3}$，解集为$\{x|x<\frac{a}{3}$或 $x>-\frac{a}{4}\}$．

综上所述：当 $a>0$ 时，不等式的解集为$\{x|x<-\frac{a}{4}$或 $x>\frac{a}{3}\}$；

当 $a=0$ 时，不等式的解集为$\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$；

当 $a<0$ 时，不等式的解集为$\{x|x<\frac{a}{3}$或 $x>-\frac{a}{4}\}$．，

***3、已知二次函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a,b,c\in R\right)$ 满足：对任意实数 x，都有 $f\left(x\right)\geq x$，

且当 $x\in\left(1,3\right)$ 时，有 $f\left(x\right)\leq\frac{1}{8}\left(x+2\right)^2$ 成立；

（1）证明：$f\left(2\right)=2$；

（2）若 $f\left(-2\right)=0$，求 $f\left(x\right)$ 的表达式；

解：（1）由条件知：$f\left(2\right)=4a+2b+c\geq 2$ 恒成立，且 $f\left(2\right)\leq\frac{1}{8}\left(2+2\right)^2=2$ 成立，∴

$f\left(2\right)=2$；

（2）由 $\begin{cases}f\left(2\right)=2\\f\left(-2\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+2b+c=2\\4a-2b+c=0\end{cases}\Rightarrow 4a+c=2b=1\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\c=1-4a\end{cases}$；

由 $f\left(x\right)\geq x$ 恒成立，∴ $ax^2+\left(b-1\right)x+c\geq 0$ 恒成立，∴

$\begin{cases}a>0\\\Delta\leq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\\left(4a-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0\end{cases}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{8},b=c=\frac{1}{2}$，∴ $f\left(x\right)=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$；

***4、对任意 $a\in[-1,1]$ 不等式 $x^2+(a-4)x+4-2a>0$ 恒成立，则实数 x 的取值范围是_________.

解：设 $f(a)=(x-2)a+x^2-4x+4$，则原问题可转化为一次函数（或常数函数）$f(a)$ 在区间 $[-1,1]$ 上恒正时 x 应满足的条件，故应有 $\begin{cases}f(-1)>0,\\f(1)>0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2-5x+6>0,\\x^2-3x+2>0,\end{cases}$

化为 $\begin{cases}(x-2)(x-3)>0,\\(x-1)(x-2)>0.\end{cases}$ 解之，得 $x<1$ 或 $x>3$.

【答案】 $x<1$ 或 $x>3$

五、回家作业

1、下列不等式的解集是 $\varnothing$ 的为(　　)

A. $x^2+2x+1\leqslant 0$　　B. $\sqrt{x^2}\leqslant 0$　　C. $(\frac{1}{2})^x-1<0$　　D. $\frac{1}{x}-3>\frac{1}{x}$

2、若 $x^2-2ax+2\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立，则实数 a 的取值范围是(　D　)

A. ($-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$]　　B. ($-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$)　　C. [$-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$)　　D. [$-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$]

3、已知不等式 $ax^2+bx+c<0$ $(a\neq 0)$ 的解集是 **R**，则(　B　)

A. $a<0$，$\Delta>0$　B. $a<0$，$\Delta<0$　C. $a>0$，$\Delta<0$　D. $a>0$，$\Delta>0$

4、不等式 $2x^2+mx+n>0$ 的解集是 $\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$，则二次函数 $y=2x^2+mx+n$ 的表达式是(　D　)

A. $y=2x^2+2x+12$　B. $y=2x^2-2x+12$　C. $y=2x^2+2x-12$　D. $y=2x^2-2x-12$

5、不等式 $x^2+mx+\frac{m}{2}>0$ 恒成立的条件是________.

答案：$0<m<2$

6、设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x>\frac{1}{2}$”是“$2x^2+x-1>0$”的(　A　)

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件　C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

解：$2x^2+x-1>0$ 的解集为 $\{x|x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-1\}$，故由 $x>\frac{1}{2}\Rightarrow 2x^2+x-1>0$，但 $2x^2+x-1>0$ $D\Rightarrow/$ $x>\frac{1}{2}$.

则“$x>\frac{1}{2}$”是“$2x^2+x-1>0$”的充分不必要条件.

7、若函数 $y=\sqrt{kx^2-6kx+k+8}$ 的定义域是 **R**，求实数 k 的取值范围.

解：①当 $k=0$ 时，$kx^2-6kx+k+8=8$ 满足条件；

②当 $k>0$ 时，必有 $\Delta=(-6k)^2-4k(k+8)\leqslant 0$，

解得 $0<k\leqslant 1$. 综上，$0\leqslant k\leqslant 1$.

8、求下列关于 x 的不等式的解集：

(1) $-x^2+7x>6$；

(2) $x^2-(2m+1)x+m^2+m<0$.

解：(1) $\{x|1<x<6\}$.　　(2) $\{x|m<x<m+1\}$.

9、解不等式 $0\leqslant x^2-x-2\leqslant 4$.

解：原不等式等价于 $\begin{cases}x^2-x-2\geqslant 0,\\ x^2-x-2\leqslant 4,\end{cases}$ $=\{x|-2\leqslant x\leqslant -1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 3\}$.

10、已知关于 x 的不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $(1,2)$，求关于 x 的不等式 $bx^2+ax+1>0$ 的解集.

解： 由韦达定理有：$\begin{cases}-a=1+2\\ b=1\times 2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-3\\ b=2\end{cases}$，代入不等式 $bx^2+ax+1>0$ 得 $2x^2-3x+1>0$，

即 $(2x-1)(x-1)>0$，解得 $x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x>1$.

$\therefore bx^2+ax+1>0$ 的解集为：$(-\infty,\dfrac{1}{2})\cup(1,+\infty)$.

第 9 讲　其他不等式的解法

【知识梳理】

1.分式不等式

(1)分母上带有未知数的不等式称为分式不等式.

(2)一般特征：可以化为形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 或 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$，其中 $f(x),g(x)$ 为整式，$g(x)\neq 0$ 的形式.

2.同解原理

(1)如果两个不等式的解集相等，那么这两个不等式就叫做同解不等式，一个不等式变形为另一个不等式时，如果两个不等式是同解不等式，这种变形叫做不等式的同解变形.

(2)解分式不等式的关键是将它变形为同解不等式

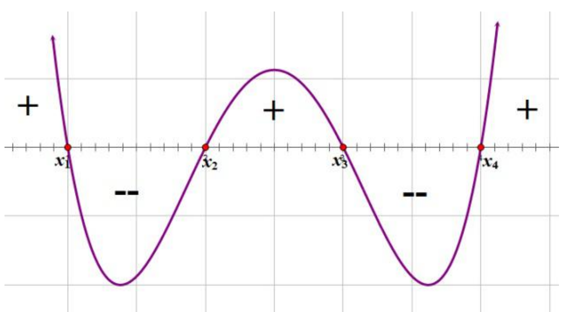
$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0(<0)$；$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0(\leq 0)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geq 0(\leq 0),\\ g(x)\neq 0\end{cases}$.

3.高次不等式

(1)只含有一个未知数，并且未知数的最高次数大于 2 的整式不等式称为高次不等式.

(2)解形如 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)>0(<0)$ 的高次不等式，

令 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$，其中 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，显然当 $x>a_n$ 时，$f(x)>0$；当 $x\in(a_{n-1},a_n)$ 时，$f(x)<0$；当 $x\in(a_{n-2},a_{n-1})$ 时，$f(x)>0$；……：由此可得



$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)>0(<0)$ 的解集.

(3)上述过程在数轴上形象地表示出来，称为数轴标根法.

(4)步骤归纳

①将不等式化为 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)>0(<0)$ 形式，使各因式 x 的最高次项系数为正.

②求根，并在数轴上表示出来

③由右上方穿线，经过数轴上表示各根的点，看图像写出解集，注意奇次根穿透，偶次根不穿透.

4.绝对值不等式

(1)绝对值：一个数在数轴上所对应的点到原点的距离.

①代数意义：$|a|=\begin{cases}a,a>0,\\0,a=0,\\-a,a<0\end{cases}$

②几何意义：$|a|$ 表示实数 a 所对应的点到原点的距离，进一步地，$|a-b|$ 表示实数 a 所对应的点到 b 对应的点的距离.

(2)同解不等式：

①当实数 $a>0$ 时，$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$，$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

② $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$，$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$.

③$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$

【例题解析】

***1.解下列分式不等式**

(1) $\dfrac{2x+1}{x-1}\geq 0$；　(2) $\dfrac{2x+1}{x-2}\geq 4$；　(3) $\dfrac{x+8}{x^2+2x+3}\leq 2$；　(4) $\dfrac{1}{2x-1}<\dfrac{1}{2x+1}$.

解：(1) $x\in(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup(1,+\infty)$；(2) $x\in(2,\dfrac{9}{2}]$；(3) $x\in(-\infty,-2]\cup[\dfrac{1}{2},+\infty)$；(4) $x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

****2.含参数方程和不等式**

(1)当 m 为何实数时，关于 x 的方程$m(x-3)=3(x+1)$的解 ①为正数；②在[1,2)范围内.

解：① $m\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$；② $m\in(-9,-3]$.

(2)当实数$a\neq 0$时，解关于 x 的不等式$\dfrac{a(x-1)}{x-2}>1$.

解：$a<0$时$x\in(\dfrac{a-2}{a-1},2)$；$0<a<1$时$x\in(2,\dfrac{a-2}{a-1})$；

$a=1$时$x\in(2,+\infty)$；$a>1$时$x\in(-\infty,\dfrac{a-2}{a-1})\cup(2,+\infty)$.

****3.解下列高次方程**

(1) $(1-x)(x+1)(x-2)>0$；　　(2) $x^3+3x^2\geq 2x+6$；

(3) $(x+2)^2(x-1)^3(x+1)(x-2)<0$；　　(4) $\dfrac{x(x+1)^2(x-2)}{(x-3)^3(x-5)}\leq 0$；

(5) $x\geq\dfrac{1}{x}$；　　(6) $(x+5)(x+2)(x-1)(x-4)+80\leq 0$.

解(1) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$；(2) $x\in[-3,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$；

(3) $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(1,2)$；(4) $x\in\{-1\}\cup[0,2]\cup(3,5)$；(5) $x\in[-1,0)\cup[1,+\infty)$；

(6) $x\in[-4,\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}]\cup[\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2},3]$.

****4.解下列绝对值不等式(定义法)**

(1) $3 \le |2x-1| < 7$；　　(2) $|x^2-5x+5| \le 1$.

(3) $|x^2-2x| < \frac{1}{2}x$；　　(4) $5|x+2| > 3x+14$.

解：(1) $x \in (-3,-1] \cup [2,4)$；(2) $x \in [1,2] \cup [3,4]$；(3) $x \in (\frac{3}{2},\frac{5}{2})$；

(4) $x \in (-\infty,-3) \cup (2,+\infty)$.

*****5.解下列绝对值不等式(零点分段法)**

(1) $|x+2|+|x-1| < 4$；　　(2) $x^2-2|x|-15 > 0$

解：(1) $x \in (-\frac{5}{2},\frac{3}{2})$；(2) $x \in (-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$.

****6.解下列绝对值不等式(两边平方法)**

(1) $|3x-1| \le |x+2|$；　　(2) $|\frac{x+2}{3x-1}| \ge 1$.

解：(1) $x \in [-\frac{1}{4},\frac{3}{2}]$；(2) $x \in [-\frac{1}{4},\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3},\frac{3}{2}]$.

7.恒成立问题

***(1)当实数 a 为何值时，$-3 < \frac{3x^2+ax+6}{x^2-x+1} \le 6$ 恒成立.

***(2)如果不等式 $|x+1|+|x+2| \ge m$ 对任意 $x \in R$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

***(3)$|x+1|+|x+2|<m$的解是非空集合，求实数 m 的取值范围.

***(4)不等式$|x+3|-|x-1|\le a^2-3a$对任意$x\in R$恒成立，求实数 a 的取值范围.

****(5)关于 x 的不等式$\left|\dfrac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}\right|<3$的解集为 R，求实数 k 的取值范围.

****(6)不等式$|x+1|\ge kx$对任意$x\in R$恒成立，求实数 k 的取值范围.

解：(1) $a=-6$； (2) $m\le 1$； (3) $m>1$； (4) $a\in(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$； (5) $k\in(-5,-1)$；

(6) $k\in[0,1]$.

三、基础训练

1.解下列不等式

(1)$\dfrac{x+1}{2x-3}<1$； ** (2) $x\ge\dfrac{1}{x}$； *(3)$\dfrac{x^2+2x-2}{3+2x-x^2}<x$.

解：(1) $x\in(-\infty,\frac{3}{2})\cup(4,+\infty)$； (2) $x\in[-1,0)\cup[1,+\infty)$； (3) $x\in(-1,2)\cup(3,+\infty)$.

2.解下列不等式

(1) $(x+4)(x+5)^2(2-x)^3<0$；(2) $\frac{3x-5}{x^2+2x-3}\le 2$.

解：(1) $x\in(-\infty,-5)\cup(-5,-4)\cup(2,+\infty)$； (2) $x\in(-\infty,-3)\cup[-1,\frac{1}{2}]\cup(1,+\infty)$.

**3.若关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$，求关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-2}>0$ 的解集.

解： $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

***4.解关于 x 的不等式 $\frac{a(x+1)}{x}>1$.

解：当 $a<1$ 时 $x\in(0,\frac{a}{1-a})$；当 $a=1$ 时 $x\in(0,+\infty)$；当 $a>1$ 时 $x\in(-\infty,\frac{a}{1-a})\cup(0,+\infty)$.

***5.关于 x 的不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$，求关于 x 的不等式 $\frac{x}{ax+2}\le 1$ 的解集.

解： $x\in(-\infty,\frac{2}{5}]\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

**6.求下列不等式的解集

(1) $|\frac{x+1}{x+2}|>1$； (2) $\frac{1}{|2x-3|}>2$； (3) $|\frac{x}{1+x}|>\frac{x}{1+x}$； (4) $|x^2-5x+10|>x^2-18$.

解 ： (1) $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,-\frac{3}{2}]$ ； (2) $x\in(\frac{5}{4},\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\frac{7}{4})$ ； (3) $x\in(-1,0)$ ；

(4) $x\in(-\infty,\dfrac{28}{5})$.

***7.若存在实数 x 使$|x-a|+|x-1|\le 3$成立，求实数 a 的取值范围.

解：$a\in[-2,4]$.

***8.当$a>0$时，求不等式$|\dfrac{ax-1}{x}|>a$的解集.

解：$x\in(-\infty,0)\cup(0,\dfrac{1}{2a})$.

**9.若关于 x 的不等式$|a|\ge|x+1|+|x-2|$存在实数解，求实数 a 的取值范围.

解：$a\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

***10.已知关于 x 的不等式$|x-a|<|x|+|x+1|$的解集为 R，求实数 a 的取值范围.

解：$a\in(-1,0)$

四、拓展提高

***1.解无理不等式：$\sqrt{3x-4}>\sqrt{x-3}$；　$\sqrt{5-4x-x^2}\ge x$.

解：$x\in[3,+\infty)$；　$x\in[-5,-1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}]$；

****2.已知不等式$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}\ge 0$的解集为$[-1,2]\cup(3,+\infty)$，求不等式

$\dfrac{x-c}{(x-a)(x-b)}\le 0$的解集.

解：　$x\in(-\infty,-1)\cup(2,3]$；

****3.若$\dfrac{x^2-(a+a^2)x+a^3}{x^2+4x+3}<0$的解集是$\{x|-1<x<9\}$，求实数$a$的值.

解：　$a=-3$.

****4.已知集合 $M=\{x\mid\frac{ax-5}{x^2-a}<0\}$，若 $3\in M,5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

解：$a\in[1,\frac{5}{3})\cup(9,25]$

****5.设 $a\in R$，若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geq 0$，求 a 的值.

解：$a=\frac{3}{2}$

******6.设集合 $A=\{x\mid |x-\frac{1}{2}(a+1)^2|\leq\frac{1}{2}(a-1)^2\},B=\{x\mid x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leq 0\}$，若果 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

解：$a\in\{-1\}\cup[1,3]$.

五、回家作业

1.不等式$\frac{x-3}{2-x}>0$的解集为______；$x\in(2,3)$

2.设集合$A=\{x\,|\,\frac{x-1}{3-x}\le 2\}$，那么$ð_R A=$_______$(-\infty,\frac{7}{3}]\cup(3,+\infty)$

3.若不等式$\frac{x^2-8x+24}{mx^2-mx-1}<0$对一切$x\in R$恒成立，则实数 m 的取值范围是__________

$m\in(-4,0]$

4. 不等式$\frac{(x-1)(x+2)}{x-2}\ge 0$的解集为_______；$[-2,1]\cup(2,+\infty)$

5.关于 x 的不等式$|x-2|<3$的解集为_______$(-1,5)$

6.若$|\frac{2x-1}{x+1}|=\frac{2x-1}{x+1}$，则实数 x 的取值范围是________________.

解：$(-\infty,-1)\cup[\frac{1}{2},+\infty)$

7.下列不等式中与不等式$\frac{x-3}{x-2}\ge 0$同解的是(　　)D

A. $(x-2)(x-3)\ge 0$； B. $(x-2)(x-3)\ge 0$或$x\ne 2$；

C. $(x-2)(x-3)>0$且$x=3$； D. $(x-2)(x-3)>0$或$x=3$.

8.不等式$x<\frac{1}{x}$的解集为(　　)D

A. (0,1)； B. $(-\infty,-1)$； C. $(-\infty,1)$； D. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

9.不等式$|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$的解集为(　　)C.

A. R； B. ∅； C. (1,2)； D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

10.解不等式：$\frac{x+8}{x^2+2x+3}<2$.

解：$x\in(-\infty,-2)\bigcup(\frac{1}{2},+\infty)$

11.若关于 x 的不等式 $ax>b$ 的解集是 $(-\infty,-1)$，求关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-3}>0$ 的解集.

解：$x\in(1,3)$

12.若不等式 $|x+1|-|x-2|>m$ 的解集为 R，求实数 m 的取值范围.

解：$m<-3$

第 11 讲　基本不等式

【知识点总结】

1、基本不等式原始形式

（1）若 $a,b\in R$，则 $a^2+b^2\ge 2ab$　　　（2）若 $a,b\in R$，则 $ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$

2、基本不等式一般形式（均值不等式）

若 $a,b\in R^*$，则 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

3、基本不等式的两个重要变形

（1）若 $a,b\in R^*$，则 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$　　　（2）若 $a,b\in R^*$，则 $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

总结：当两个正数的积为定植时，它们的和有最小值；

当两个正数的和为定植时，它们的积有最小值；

特别说明：以上不等式中，当且仅当 $a=b$ 时取“=”

4、求最值的条件：“一正，二定，三相等”

5、常用结论

（1）若 $x>0$，则 $x+\frac{1}{x}\ge 2$（当且仅当 $x=1$ 时取“=”）

（2）若 $x<0$，则 $x+\frac{1}{x}\le -2$（当且仅当 $x=-1$ 时取“=”）

（3）若 $ab>0$，则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$　（当且仅当 $a=b$ 时取“=”）

（4）若 $a,b\in R$，则 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$

（5）若 $a,b\in R^*$，则 $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

特别说明：以上不等式中，当且仅当 $a=b$ 时取“=”

6、柯西不等式

（1）若 $a,b,c,d\in R$，则 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$

（2）若 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in R$，则有：

$$({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({_1}{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

（3）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $\mathrm{b}_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两组实数，则有

$$({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

二、例题分析

题型一：利用基本不等式证明不等式

*例 1、(1)已知 $ab>0$，求证：$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge2$，并指出等号成立的条件.

（2）若 $ab<0$，则代数式 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的取值范围是什么？

（3）若 $ab\ne0$，则代数式 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的取值范围是什么？$\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|$ 呢？

**例 2、已知 a,b,c 为两两不相等的实数，求证：$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$

**例 3、已知 $a,b,c\in R^+$，且 $a+b+c=1$，求证：$(1-a)(1-b)(1-c)\ge8abc$

题型二：利用不等式求函数值域

***例 4、求下列函数的值域**

（1）$y=3x^2+\dfrac{1}{2x^2}$　　　　（2）$y=x(4-x)$　　　　（3）$y=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$

解：$2\sqrt{3}$；$(-\infty,4]$；$[2,+\infty)$；

题型三：利用不等式求最值　（一）（凑项）

*例 5、已知 $x>2$，求函数 $y=2x-4+\dfrac{4}{2x-4}$ 的最小值；

解：4；

变式：已知 $x>2$，求函数 $y=2x+\dfrac{4}{2x-4}$ 的最小值；

解：8；

**例 6、(1) $0<x<1$ 时，　$u=x(1-x)$ 的的最大值为__1/4_______.

(2)若 $0<x<\dfrac{1}{2}$，函数 $y=x(1-2x)$ 的最大值为______1/8_____.

(3)设 $x,y\in R^{+}$，且　$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$，则 $x\cdot\sqrt{1+y^2}$ 的最大值为　$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

题型四：**利用不等式求最值　（二）**

***例 7、求函数 $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-2x}(\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2})$ 的最大值；

（提示：平方，利用基本不等式）

解：　$2\sqrt{2}$

****例 8、已知 $x,y>0$，$x+2y+2xy=8$，求 $x+2y$ 最小值；

解：　4

题型五：巧用“1”的代换求最值问题

**例 9、已知 $a,b>0,a+2b=1$，求 $t=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值；

解： $3+2\sqrt{2}$

变式 1：已知 $a,b>0,a+2b=2$，求 $t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值；

解： $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

变式 2：已知 $x,y>0,\frac{2}{x}+\frac{8}{y}=1$，求 xy 的最小值；

解： 64

***例 10、若 $a,b,x,y\in R^{+}$ 且 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，求 $x+y$ 的最小值；

解： 16

题型六：分离换元法求最值（了解）

***例 11、求函数 $y=\frac{x^{2}+7x+10}{x+1}(x\neq -1)$ 的值域；

解： $(-\infty,1)\cup[9,+\infty)$

***例 12、求函数 $y=\frac{\sqrt{x+2}}{2x+5}$ 的最大值；（提示：换元法）

解： $\frac{\sqrt{2}}{4}$

三、基础训练

*1. 已知 $x>\frac{5}{4}$，求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最小值；

解： 5

**2. 求函数 $y=\sqrt{4x-3}+\sqrt{11-4x}(\frac{3}{4}<x<\frac{11}{4})$ 的最大值；

解：　4

**3. 若 $x,y>0$ 且 $2x+y=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值；解：（1）$3+2\sqrt{2}$

**5. 若 $0<x<4$，求 $y=\sqrt{x(8-2x)}$ 的最大值；

解：　8

***6. 求函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{4x+9}$ 的最大值；　解：　$\frac{\sqrt{5}}{20}$

***7. 已知 $a,b>0$，满足 $ab=a+b+3$，求 ab 范围；

解：$[9,+\infty)$

***4. 已知 $a+b+c=1$，求证：$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

四、拓展提高

****1.（1）在周长保持不变的条件下，何时矩形的面积最大？

（2）在面积保持不变的条件下，何时矩形的周长最小？

解：（1）设矩形的长、宽分别为 a 、b（a 、$b\in R^+$）且 $a+b=m$（定值），则同样周长的正方形的边长为 $\frac{a+b}{2}$. 矩形面积 $S=ab$，正方形面积 $S'=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

由基本不等式 2，得 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，又由不等式的性质得 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq\left(\sqrt{ab}\right)^2$，即 $S'\geq S$.

由题意，$a+b=m$（定值），所以 $S\leq\left(\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}$（定值）. 当且仅当 $a=b$，即矩形为正方形时，矩形的面积最大.

（2）解：设矩形的长、宽分别为 a 、b（a 、$b\in R^+$）且 $ab=m$（定值），则同样面积的正方形的边长为 $\sqrt{ab}$. 矩形周长 $C=2\left(a+b\right)$，正方形周长 $C'=4\sqrt{ab}$.

由基本不等式 2，得 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，又由不等式的性质得 $2\left(a+b\right)\geq4\sqrt{ab}$，即 $C\geq C'$.

由题意，$ab=m$（定值），所以 $C\geq4\sqrt{m}$（定值）. 当且仅当 $a=b$，即矩形为正方形时，矩形的周长最小.

****2. 已知 $a,b>0$，求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}$ 的最小值；

解： 4

*****3. 如果 $a>b>0$，求关于 a,b 的表达式 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值；

解： 12

*****4. 设正实数 x,y,z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$，则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ 的最大值为（ B ）

A．0　　B．1　　C．$\frac{9}{4}$　　D．3

（提示：代入换元,利用基本不等式以及函数求最值）

*****5. 设 x,y,z 是正数，满足 $x-2y+3z=0$，求 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值；

解： 3

***6. 设 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=1$，证明:

（Ⅰ）$ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$；　（Ⅱ）$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 1$.

五、回家作业

*1.“$a>b>0$”是”$ab<\frac{a^2+b^2}{2}$”的　　（ A）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

*2．下列各式中，最小值为 2 的是　　（ D ）

A． $x+\frac{1}{x}$　　B． $\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$　　C． $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$　　D． $x-2\sqrt{x}+3$

*3.（1)若 $ab=1$，求 a^2+b^2和$a+b$ 的取值范围.

（2)若 $a+b=1$，求 ab和a^2+b^2 的取值范围。

*4. 求函数 $y=x+\frac{1}{x}(x<0)$ 的值域　　解：$(-\infty,-2]$

*5. 已知 $x<2$，求函数 $y=2x+\frac{4}{2x-4}$ 的最大值；

解：0；

**6. 已知 $x,y>0$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9$，求 $x+y$ 的最小值。

解：　4/9

**7. 已知 $x,y>0$，且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=4$，求 $x+y$ 的最小值；

解：　4

***8. 求函数 $y=\frac{x^2+8}{x-1}(x>1)$ 的值域；

解：　8

***9. 已知 $x,y\in R^+, xy=x+y+1,$ 求 $x+y$ 的取值范围。

解：$x+y\geq 2\sqrt{2}+2$

**10. 证明不等式：a、b、$c\in R^+$，求证 $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$；

第 12 讲 函数的概念

二【典型例题】

例一. 1.（1）是；（2）不是　2. D　3. D

例二. 1. B

2.（1）$(-1,0)\cup(0,1)$；（2）$(1,3)$；（3）$\left[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\right]$

例三. 1. -26

2. $f(x)=x^2+x-2$

3. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

例四.1． $y=x-2160\left(x>2700\right)$

2． $y=-\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)x^2+lx,\left(0<x<\dfrac{l}{\pi+2}\right)$

三．基础训练

1．D　　2．B　　3．C

4.（1）$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$；（2）$\left\{x\middle|x<0,x\neq-1\right\}$；

（3）$\left(-\dfrac{2}{3},6\right]$；（4）$\left[-2,1\right)\cup\left(1,5\right]$

5. $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{3x-7}$

四．拓展提高

1． $1,2,-1$

2． $f\left(x+1\right)=3x+4$

3． $\left\{12,13,14\right\}$

4． 15

5． $f\left(x\right)=x^3-3x,\left(\left|x\right|\geq 2\right)$

6. $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}$

五．回家作业

1． $y=\dfrac{c-a}{b-c}\cdot x,\left(x>0\right)$

2． $y=x-2160\left(x>2700\right)$

3． $y=-\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)x^2+lx,\left(0<x<\dfrac{l}{\pi+2}\right)$

4． $y=6x+\dfrac{3456}{x}+480$，当长度 $x=24$ 时最省

5． $S=-x^2+15x,\left(0<x<15\right)$

第 13 讲 函数的运算

二.【典型例题】

例 1、$F\left(x\right)=\sqrt{x+1},\left(x>1\right)$

例 2、$f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}},\left(-1\le x\le 3\right)$

例 3. $\left[-\dfrac{1}{2a},\dfrac{1}{2a}\right]$

例 4、$f\left(x\right)=\dfrac{2}{x}-x$

例 5. 1000

三．基础训练

1．$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}},\left(1<x\le 2\right)$

2．$\sqrt{\dfrac{x-3}{x-5}},\left(x<2\text{或}x>5\right)$

3．略

4．$f_1\left(x\right)=x^2+x$，$f_2\left(x\right)=-x^2$

四．拓展提高

1、$f\left(x\right)+g\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{3-x}+x-1,x\le -1\\0,-1<x\le 1\\\sqrt{x-1}+1-x,x>1\end{cases}$

2、$f\left(x\right)=\dfrac{2}{x}-x$

3. $F\left(x\right)=3x+\dfrac{5}{x}$

4. $\left[-\dfrac{3}{2},0\right]$

5. $h\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1},x\ne 1\\1,x=1\end{cases}$，值域$\left(-\infty,0\right]\cup\left\{1\right\}\cup\left[4,+\infty\right)$

五．回家作业

一、填空题

1. $\left[-1,1\right]$

2. $\sqrt{x},\left(x\geq 0\text{且}x\neq 1\right)$

3. $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x}+\dfrac{4-x}{\sqrt{x}+2},x>1\\-\sqrt{x}+\dfrac{4-x}{\sqrt{x}+2},0\leq x<1\end{cases}$

4. $\left\{1\right\}$

5. 充分非必要

6. $\left[-b,b\right]$

7. $\left[-a,a\right]$

二、选择题

8. C

三、解答题

9. $F\left(x\right)=x\left(x-1\right),\left(x\geq 1\right)$

10. $F\left(3\right)=\sqrt{2}-2,F\left(-3\right)=-2$；$F\left(x\right)=\begin{cases}x-1+\sqrt{1-x},x\leq -1\\0,-1<x\leq 1\\\sqrt{x-1}+1-x,x>1\end{cases}$

第 14 讲 函数的奇偶性

例一.（1）偶；（2）奇；（3）奇；（4）奇；（5）奇；（6）奇

例二. 略

例三. 1. $\frac{1}{3}$

2. $\left[-10,2\right]$

3. $a=1$

例四. 1.A　2.C　3.C　4. -4　5. -3

例五.奇偶函数中的分段问题

1. -3

2. $f\left(x\right)=x\left|x+2\right|,x<0$

3. -45

4. 24

5. $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$

例六 奇函数的特殊和性质

1. 4

2. 0

3. -26

4. $\frac{4}{3}$

例七　函数奇偶性的结合性质

1.C　2.A

3. $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2-1},g\left(x\right)=\frac{x}{x^2-1}$

三．基础训练

1. 1　2. 4　3. -10　4. -4

4.（1）奇；（2）偶；（3）偶；（4）非奇非偶；（5）偶；

（6）奇；（7）既奇又偶；（8）偶；（9）偶；（10）偶

5. $\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$

6. $\left(-1,3\right)$

7. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

四．拓展提高

1.D　　2. 0　　3. 0　　4. $f\left(x\right)=\frac{x}{x^2+1}$　　5. $x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)$

6. $-x^2+x+1$　　7. 1　　8. 0

五、**回家作业**

1. 0

2. 4

3. 9

4. $\frac{1}{2}$

5. 0

6. -2

7. A

8. A

9. 0

10. 3

11. 略

12. -1；-7

13. 0

第 16 讲 函数的单调性

二．典型例题

例 1：（1）$(-\infty,0)$递增，$(0,+\infty)$递减

（2）$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$分别递减

（3）$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$分别递减

（二）证明函数的单调性：

例 2：略

例 3:不是

（三）较复杂函数的单调性证明：

例 4：$(0,1)$递增，$(1,+\infty)$递减

例 5：（证明略）

例 6、（1）$\underline{[-1,1]}$（2）$\underline{[1,+\infty)}$（3）$\underline{(-\infty,-1)\text{和}(0,1)}$

（四）已知函数单调性，求参数范围：

例 7：(1) $\underline{-16}$

（2）$m\le-16$

例 8：$a\in(0,1)$

三．基础训练

1．C　　2．D　　3．B　　4．B　　5．B　　6．A

7．D　　8．C　　9．C　　10．A　　11．B　　12．A

四．拓展提高

1. $(-2,2)$

2. $[0,1]$

3. $(-5,-4)\cup(4,5)$

4. $(0,+\infty)$

5. $(-3,0)\cup(0,3)$

6. B

7. B

8. $[1,3]$

9. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

10. $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$

五．回家作业

1. $\left(0,1\right)$

2. 略

3. （1）0；（2）略；（3）$f\left(-25\right)<f\left(80\right)<f\left(11\right)$

4. （1）$m=4,n=6$；（2）$a\geq 0$

5. （1）$a=0$时，偶；$a\neq 0$时，非奇非偶；（2）$f_{\min}=\begin{cases}\frac{3}{4}-a,a\leq -\frac{1}{2}\\ a^2+1,-\frac{1}{2}<a\leq \frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}+a,a>\frac{1}{2}\end{cases}$

6. D