参考答案

第 1 讲 初中平面向量衔接

1. $2\sqrt{3}$；2. 13；3. [3,13]；4. ①③④；5. $\overrightarrow{EF}$；6. 4；

7. $\sqrt{3}$；8. 1；9. 2；10. [1,5]；11. $1+\sqrt{3}$；12. $\frac{4}{3},\sqrt{10}$；

13. B；14. C；15. B；16. B；

17. $\sqrt{3},1$；

18. 略；

19. 略；

20. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b},\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$；

21. $\left[\frac{7}{25},+\infty\right)$.

第 2 讲 平面向量的分解定理

1. $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$；2. $-\frac{3}{2}$；3. $-\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{4}{3}\vec{d},\frac{4}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{d}$；4. 4；5. $-\frac{5}{7}$；6. ④；

7. $-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$；9. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$；9. $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$；10. $\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$；11. m=1；12. 2.

13. B；14. B；15. A；16. D.

17. $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$；

18.略；

19.略；

20.略；

21. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$，$\frac{1}{\lambda}+\frac{3}{\mu}=7$.

第 3 讲 向量的坐标表示及其运算

1. $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$；2. (-1,-2)；3. (5,0)；4. $\left(7\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$；5. (-6,-7)；6. (-2,8)；

7. (5,4)；8. -13；9. (1,-5),(-5,7)；10. $\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$；11. $P\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$；12. 5.

13. B；14. D；15. D；16. A.

17.(1) $-\frac{2}{3}<t<-\frac{1}{3}$；(2)不可能；

18.(1) $x=\pm 2$；(2) $x=2$ 时四点不共线，$x=-2$ 时四点共线；

19.(1) $m\neq\frac{1}{2}$；(2) $m=\frac{7}{4}$；

20.不存在.

21.(-4,2),(-2,-2),(8,0).

第 4 讲 向量的数量积

1. $-6\sqrt{2}$；2. $\frac{2\pi}{3}$；3. $\sqrt{21}$；4. $\lambda=2$；5. 10；6. 3；

7. $[0,1]$；8. $\frac{1}{2}$；9. $-\sqrt{2}+1$；10. 36；11. $\sqrt{10}$；12. $\frac{1}{2}$.

13. A；14. A；15. C；16. A.

17.(1) $k=-6$；(2) $k=1$；

18.(1) $k=\frac{1}{4}\left(t^2-3t\right), t\neq 0$；(2) $k_{\min}=-\frac{9}{16}$；

19. $\frac{13}{35}$；

20.(1) $x+2y=0$；(2) $S=16$；

21.(1) $\tan\left(\alpha+\beta\right)=2$；(2) $\left|\vec{b}+\vec{c}\right|_{\max}=4\sqrt{2}$；(3)略.

第 5 讲 平面向量的应用

1. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$；2. (-2,-1)；3. $\left(-\frac{5}{2},-3\right)$；4. 1；5. $\frac{1}{1+\lambda}\vec{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}$；6. 3；

7. 3；8. $-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$；9. $\frac{4}{3}$；10. 6；11. 4:5；12. ①；

13. A；14. B；15. B；16. C；

17.(1) $\theta=-\frac{\pi}{4}$；(2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|_{\max}=\sqrt{2}+1$；

18.(1)设 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$，可证 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$；(2)OG:GH=1:2

19.可设单位圆上的点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha),B(\cos\beta,\sin\beta)$，夹角

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

20.等边三角形.

21. $\vec{a}x_1^2+\vec{b}x_1+\vec{c}=\vec{a}x_2^2+\vec{b}x_2+\vec{c}=\vec{0}$，得 $(x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)\vec{a}+\vec{b}\right]=\vec{0}$，由于 $\vec{a},\vec{b}$ 不平行，因此 $x_1=x_2$.

第 6 讲 平面向量单元小结

例 1.解: $\vec{m}+\vec{n}=\left(\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2},\cos\theta+\sin\theta\right)$

$$\left|\vec{m}+\vec{n}\right|=\sqrt{\left(\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2}\right)^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2}=2\sqrt{1+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

由已知 $\left|\vec{m}+\vec{n}\right|=\frac{8\sqrt{2}}{5}$, ,得 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{25}$ 又∵ $\cos^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8})=\frac{16}{25}$ $\quad\therefore\ \theta\in(\pi,2\pi)$

$\therefore\ \frac{5\pi}{8}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}<\frac{9\pi}{8}\ \therefore\ \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)<0\quad\therefore\ \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{4}{5}$

例 2 解：由已知|a|=|b|=1，a 与 b 的夹角α为 60°,得 a • b=|a||b|cosα= $\frac{1}{2}$。

要计算 x 与 y 的夹角θ，需求出|x|,|y|,x • y 的值，

∵|x|²=x²=(2a−b)²=4a²−4a • b+b²=4−4× $\frac{1}{2}$ +1=3，

|y|²=y²=(3b−a)²=9b²−6b • a+a²=9−6× $\frac{1}{2}$ +1=7.

x • y=(2a－b) • (3b－a)=6a • b－2a²－3b²+a • b =7a • b－2a²－3b² =7× $\frac{1}{2}$ －2－3=－ $\frac{3}{2}$ ，

又∵x • y=|x||y|cosθ，即－ $\frac{3}{2}$ = $\sqrt{3}$ × $\sqrt{7}$ cosθ，∴cosθ=－ $\frac{\sqrt{21}}{14}$ ，θ= π －arccos $\frac{\sqrt{21}}{14}$ 。

例 3 解：设 $\angle AOC=\alpha$ $\begin{cases}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=x\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=x\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}\end{cases}$，即 $\begin{cases}\cos\alpha=x-0.5y\\ \cos(120^\circ-\alpha)=-0.5x+y\end{cases}$

∴ $x+y=2[\cos\alpha+\cos(120^0-\alpha)]=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\le 2$

例 4 解：(Ⅰ) ∵ $\left|k\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{a}-k\vec{b}\right|$ 两边平方，得 $|k\vec{a}+\vec{b}|^2=3|\vec{a}+k\vec{b}|^2$，

即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{(3-k^2)\vec{a}^2+(3k^2-1)\vec{b}^2}{8k}$ $\because\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta),$

$\therefore\overrightarrow{a^2}=1,\overrightarrow{b^2}=1.\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{k^2+1}{4k}.$

(2) $\because k>0,\therefore(k-1)^2\ge 0,$ 从而 $k^2+1\ge 2k,\dfrac{k^2+1}{4k}\ge\dfrac{2k}{4k}\ge\dfrac{1}{2}$，∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，此时

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1}{2},\theta=60^\circ$，即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 60°.

例 5 解：$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{FO}\right|\left|\overrightarrow{FQ}\right|\sin(\pi\text{-}\theta)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{FQ}}{\cos\theta}\sin(\pi\text{-}\theta)=\dfrac{1}{2}\tan\theta$

$\therefore 1<\tan\theta<\sqrt{3}$ $\therefore\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$

例 6 解 (1)∵ $\angle BAC=x,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=8$，$4\le S\le 4\sqrt{3}$， 又 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin x$，

∴ $bc\cos x=8$，$S=4\tan x$，即 $1\le\tan x\le\sqrt{3}$. ∴所求的 x 的取值范围是 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{3}$.

(2)∵ $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{3}$， $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2(x+\dfrac{\pi}{4})+2\cos^2 x-\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$

$=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1,$ ∴ $\dfrac{2\pi}{3}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{5\pi}{6}$， $\dfrac{1}{2}\le\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $f(x)_{\min}=f(\dfrac{\pi}{3})=2$，$f(x)_{\max}=f(\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{3}+1$.

课后练习

1. $\frac{\pi}{4}$；2. 钝角；3. $\sqrt{3}$；4. 10；5. $\sqrt{2}$；6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$；

7. $|\overrightarrow{BC}|=4\sqrt{2},|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{10},t=-\frac{11}{5}$；8. $k=f(t)=\frac{t^2-t-5}{t+2},t\neq-2,k_{\min}=-3$；9. -2; 10. $\sqrt{29}$；

11. C. 12. D; 13. B; 14. A; 15. C; 16. D; 17. C; 18. C; 19. B; 20. C; 21. C; 22. B;

23. (1,5); 25. $\frac{5}{2}$; 26. $\sqrt{6}$; 27. -25; 28. -4; 29. $\frac{\sqrt{65}}{5}$; 30. $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$; 31. [-6,2]; 32. $(\sqrt{2},\sqrt{2})$或$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

第 8 讲 矩阵

典型例题：1:$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$；2. 解:$\begin{pmatrix}4 & 10 & 1\\ 7 & 15 & -2\end{pmatrix}$；3. 解: 3×2；

4. 解 $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

5 解: 将两种商品的销量用矩阵表示记作$\begin{pmatrix}120 & 100 & 115\\ 70 & 75 & 70\end{pmatrix}$，期中第一二行分别表示甲和乙，两种商品的售价用矩阵表示为$\begin{pmatrix}10 & 22\\ 11 & 21\\ 10 & 20\end{pmatrix}$,则$\begin{pmatrix}10 & 22\\ 11 & 21\\ 10 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}120 & 100 & 115\\ 70 & 75 & 70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2740 & 2675 & 2550\end{pmatrix}$，三个月的销售额分别为 2740, 2675, 2550.

1.(1)$\begin{cases}4x+3y-z=5\\ 7x+2y+z=4\\ 5x-2y-3z=8\end{cases}$；(2)$\begin{cases}x=\frac{32}{43}\\ y=\frac{7}{43}\\ z=-\frac{66}{43}\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=0\\ y=-2\\ z=7\end{cases}$

3(1)$\begin{pmatrix}4 & -5 & 0\\ -3 & -7 & -4\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}11 & -14 & 2\\ -6 & -17 & 10\end{pmatrix}$

4. $a=2,b=6,x=-2,y=-4$， $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -4 & 14\end{pmatrix}$

5.(1)$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 6\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\ -1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$

6.(1) $\begin{cases}2x+3y=-5\\-x+2y=4\end{cases}$ （2） $\begin{cases}2x-y=2\\3y-2z=1\\3x+2z=-3\end{cases}$

7. $AB=14$； $BA=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

第 9 讲 行列式

1. -82；2. $m=2$；

3.(1)0；(2)无解时， $q\neq-\dfrac{2}{3}$；(3)无穷多解时， $q=-\dfrac{2}{3}$；

4. -6；5. -1或$\pm\sqrt{2}$；6. $x=2$ 或-1；

7.(1) $m\neq-1,-2,3$；(2) $m=-1$或3；(3) $m=-2$.

第 10 讲 等差数列与等比数列的复习

1. 85；

2. $a_4=a_2q^2\Rightarrow10=5q^2\Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$

3. $a_4a_7=a_3a_8\Rightarrow a_3a_8=-512$，由 $a_3+a_8=124$，得 $\begin{cases}a_3=128\\a_8=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_3=-4\\a_8=128\end{cases}$， $a_{10}=a_8q^2=-1$，

$a_{10}=a_8q^2=512$

4.根据 $a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=a_5^2$，得 $a_1a_2a_3a_4...a_9=a_5^9=512$

5. $a_n=a_3q^{n-3}=2\cdot3^{n-3}$， $a_n=a_3q^{n-3}=2\cdot3^{3-n}$；

6.可得数列为$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{7}{4}$，∴|m－n|=$\dfrac{1}{2}$，选 C.

7. $\dfrac{1}{1-a_n}=\dfrac{1}{1-a_1}+(n-1)d=\dfrac{1}{1-0}+2(n-1)=2n-1$， $\therefore a_n=1-\dfrac{1}{2n-1}$

8.依题意可得 a_n 是等差数列， $a_n=-\dfrac{2}{3}n+\dfrac{44}{3}$，代入不等式，可得

$(-\frac{2}{3}n+\frac{44}{3})(-\frac{2}{3}n+\frac{40}{3})<0$ 解得 $20<n<22$，$\therefore n=21$

9.由 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列，有 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}\Rightarrow ba+bc=2ac\Rightarrow b(a+c)=2ac$

$\therefore \frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}=\frac{c^2+bc+a^2+ba}{ac}=\frac{c^2+2ac+a^2}{ac}=\frac{(c+a)^2}{ac}=\frac{2(c+a)^2}{b(a+c)}=\frac{2(c+a)}{b}$

$\frac{b+c}{a},\frac{a+c}{b},\frac{a+b}{c}$ 也成等差数列.

10.$S_{2n-1}-4n=2\times(2n-1)-4n=-2$，故选 A

11.由互不相等的实数 a,b,c 成等差数列可设 a＝b－d，c＝b＋d，由 $a+3b+c=10$ 可得 b＝2，所以 a＝2－d，c＝2＋d，又 c,a,b 成等比数列可得 d＝6，所以 a＝－4，选 D

12.根据 $a_p-a_q=(p-q)d$，有 $q-p=(p-q)d$，所以 $d=-1$，$a_{p+q}=a_p+qd=q+q\cdot(-1)=0$

13. 17；

14. $\log_2 5$

15. ±270；

16. $2\cdot 3^{n-1}$

17. $3\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$

18. ±2；

19. $2\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$ 或 $32\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$；

20. 2^{n-1} 或 $4\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$

21. B；

22. D；

23. A；

24. B；

25.（1）略；（2）-192；

26. $a_n=\begin{cases}1(n=1)\\2n-2(n\geq 2)\end{cases}$

27. -5

28. $\dfrac{7}{6}$

29. 180

30.不是

31.$\dfrac{2}{9-8n}$

32. $\dfrac{2}{8n-7}$

33. $\dfrac{2}{n+1}$

第 11 讲 求数列通项公式的方法

1.$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；

$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots\cdots+(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})$ 所以 $a_n-a_1=1-\dfrac{1}{n}$

$\because a_1=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}$

2.已知等式可化为：$(a_{n+1}+a_n)\left[(n+1)a_{n+1}-na_n\right]=0$

$\because$ $a_n>0\,(n\in N^*)\therefore(\text{n+1})\,a_{n+1}-na_n=0$， 即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}$ $\therefore$ $n\ge 2$ 时， $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n}$

$\therefore$ $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{n}$.

3.由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$, 得 $a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$，所以数列 $\{a_n-1\}$ 构成以 $a_1-1=1$ 为首项，以 $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，所以 $a_n-1=(\dfrac{1}{2})^{n-1}$,即 $a_n=(\dfrac{1}{2})^{n-1}+1$.

4.已知 $a_1a_2a_3\cdots a_n=n^2$，则令 $n=n-1$，得到 $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}=(n-1)^2$，作商得 $a_n=\dfrac{n^2}{(n-1)^2}$，即：

$a_n=\begin{cases}1,(n=1)\\ \dfrac{n^2}{(n-1)^2},(n\ge 2)\end{cases}$，所以 $a_3+a_5=\dfrac{61}{16}$

5.取倒数：$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+2 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2$ $\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\cdot 2=2n-\frac{3}{2}$

$\therefore a_n=\frac{2}{4n-3}.$

6.$\because a_n=2a_{n-1}+2^{n+1}\left(n\geq 2\right)\therefore a_n-2a_{n-1}=2^{n+1}$，两边同除以$2^n$得$\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=2\ \therefore\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是以$\frac{a_1}{2}=1$为首项，2为公差的等差数列。$\therefore\frac{a_n}{2^n}=1+\left(n-1\right)\times 2=2n-1$，即$a_n=2^n\left(2n-1\right)$.

7.证明：$a_n-a_{n-1}=3^{n-1}$,故 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3+1=\frac{3^n-1}{2}.\qquad \therefore a_n=\frac{3^n-1}{2}.$

8. n^2-n+1

9. $a_n=2-\frac{1}{n}$

10. $a_n=2^{n+1}-3$

11. $a_n=\frac{n3^n}{3^n-1}$

12.（1）$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2^n}$.（2）$a_n=\frac{n}{2^{n-1}}$

13.(1) $a_n=4^n-2^n$

(2)将$a_n=4^n-2^n$代入①得 $S_n=\frac{4}{3}\times(4^n-2^n)-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)$

$=\frac{2}{3}\times(2^{n+1}-1)(2^n-1)\qquad T_n=\frac{2^n}{S_n}=\frac{3}{2}\times\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{3}{2}\times(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})$

所以，$\sum_{i=1}^{n}T_i=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2^i-1}-\frac{1}{2^{i+1}-1})=\frac{3}{2}\times(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^{i+1}-1})<\frac{3}{2}$

14. $a_n=\frac{b_n}{2^n}=3(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{3})^n$

15. $a_n=\begin{cases}4-3\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}, n\text{为奇数},\\ -4+3\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}, n\text{为偶数}.\end{cases}$

16. $a_n = 2^{2-2^{2-n}}$

17. $a_n = 2 + b_n = 2 - (\frac{1}{2})^{2^n - 1}$

18.因 $a_n + b_n = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1}) + \frac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1}) = a_{n-1} + b_{n-1}$

所以 $a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2} = \bullet\bullet\bullet = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 = 1$

即 $a_n + b_n = 1$（1）又因为 $a_n - b_n = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1}) - \frac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1}) = \frac{1}{3}(a_{n-1} - b_{n-1})$

所以 $a_n - b_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} - b_{n-1}) = (\frac{1}{3})^2 a_{n-2} - b_{n-2}) = \cdots\cdots = (\frac{1}{3})^{n-1}(a_1 - b_1)$

$= (\frac{1}{3})^{n-1}$.即 $a_n - b_n = = (\frac{1}{3})^{n-1}$（2）由（1）、（2）得：$a_n = \frac{1}{2}[1 + (\frac{1}{3})^{n-1}]$，　$b_n = \frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{3})^{n-1}]$

第 12 讲 求数列的前 n 项和的方法

例 1 思路分析：通过分组，直接用公式求和。

解：① $a_k = \underbrace{11\cdots1}_{k个} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^k = \frac{1}{9}(10^k - 1)$

$$S_n = \frac{1}{9}[(10-1) + (10^2 - 1) + \cdots + (10^n - 1)] = \frac{1}{9}[(10 + 10^2 + \cdots + 10^n) - n]$$

$$= \frac{1}{9}[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n] = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

② $S_n = (x^2 + \frac{1}{x^2} + 2) + (x^4 + \frac{1}{x^4} + 2) + \cdots + (x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}} + 2)$

$$= (x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}) + (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \cdots + \frac{1}{x^{2n}}) + 2n$$

（1）当 $x \neq \pm 1$ 时，$S_n = \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{x^{-2}(x^{-2n} - 1)}{x^{-2} - 1} + 2n = \frac{(x^{2n} - 1)(x^{2n+2} + 1)}{x^{2n}(x^2 - 1)} + 2n$

（2）当 $x = \pm 1$ 时, $S_n = 4n$

③ $a_k = (2k-1) + 2k + (2k+1) + \cdots + [(2k-1) + (k-1)] = \frac{k[(2k-1) + (3k-2)]}{2} = \frac{5}{2}k^2 - \frac{3}{2}k$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{5}{2}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - \frac{3}{2}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{5}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(5n-2)$

总结：运用等比数列前 n 项和公式时，要注意公比 $q=1或q\neq 1$ 讨论。

例 2 思路分析：已知数列各项是等差数列 1，3，5，…2n-1 与等比数列 $a^0,a,a^2,\cdots,a^{n-1}$ 对应项积，可用错位相减法求和.

解：$S_n=1+3a+5a^2+\cdots+(2n-1)a^{n-1}\quad(1)\qquad aS_n=\quad a+3a^2+5a^3+\cdots+(2n-1)a^n\quad(2)$

$(1)-(2):(1-a)S_n=1+2a+2a^2+2a^3+\cdots+2a^{n-1}-(2n-1)a^n$

当 $a\neq 1时,(1-a)S_n=1+\frac{2a(1-a^{n-1})}{(1-a)^2}-(2n-1)^n\quad S_n=\frac{1+a-(2n+1)a^n+(2n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}$

当 $a=1时,S_n=n^2$

例 3 思路分析:分式求和可用裂项相消法求和.

解: $a_k=\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(2k)^2-1+1}{(2k-1)(2k+1)}=1+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n+\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=n+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$

练习答案 $S_n=\begin{cases}\frac{n(n+1)}{2} & (a=1)\\ \frac{a(a^n-1)-n(a-1)}{a^n(a-1)^2} & (a\neq 1)\end{cases}$

例 4 思路分析：由 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 可用倒序相加法求和。

证：令 $S_n=C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+\cdots+(2n+1)C_n^n\qquad(1)$

则 $S_n=(2n+1)C_n^n+(2n-1)C_n^{n-1}+\cdots+5C_n^2+3C_n^1+C_n^0\qquad(2)\qquad\because C_n^m=C_n^{n-m}$

$\therefore(1)+(2)有:2S_n=(2n+2)C_n^0+(2n+2)C_n^1+(2n+2)C_n^2+\cdots+(2n+2)C_n^n$

$\therefore S_n=(n+1)[C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n]=(n+1)\cdot 2^n$，等式成立.

例 5 思路分析：$a_n=-2n-2(-1)^n$，通过分组，对 n 分奇偶讨论求和。

解：$a_n=-2n+2(-1)^n$，若 $n=2m,则S_n=S_{2m}=-2(1+2+3+\cdots+2m)+2\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k$

$$S_n=-2(1+2+3+\cdots+2m)=-(2m+1)2m=-n(n+1)$$

若

$n=2m-1$,则$S_n=S_{2m-1}=S_{2m}-a_{2m}=-(2m+1)2m+2[2m-(-1)^{2m}]=-(2m+1)2m+2(2m-1)$

$=-4m^2+2m-2=-(n+1)^2+(n+1)-2=-n^2-n-2$

$$\therefore S_n=\begin{cases}-n(n+1) & (n\text{为正偶数}) \\ -n^2-n-2 & (n\text{为正奇数})\end{cases}$$

1. $a_n=\begin{cases}-10 & n=1 \\ 6n-20 & n\ge 2\end{cases}$，$T_n=\begin{cases}-3n^2+17n-4 & n\le 3 \\ 3n^2-17n+44 & n\ge 4\end{cases}$.

2. $2^{n+2}-n-3$.

3. n 为偶数，$S_n=\frac{5}{4}n^2+\frac{n}{2}+2^{\frac{n}{2}+1}-2$；$n$ 为奇数，$S_n=S_{n-1}+5n+1=\frac{5}{4}n^2+3n-\frac{1}{4}+2^{\frac{n+1}{2}}$.

4. $\begin{cases}f(1)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^2 \\ f(-1)=-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{n-1}+a_n=n\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n^2 \\ \frac{n}{2}d=n\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a_1+a_n=2n \\ d=2\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a_1+a_1+(n-1)d=2n \\ d=2\end{cases}$ $\therefore a_1=1 \therefore a_n=2n-1$

$f(x)=x+3x^2+5x^3+\cdots+(2n-1)x^n$　　　$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+3(\frac{1}{2})^2+5(\frac{1}{2})^3+\cdots+(2n-1)(\frac{1}{2})^n$

可求得 $f(\frac{1}{2})=3-(\frac{1}{2})^{n-2}-(2n-1)(\frac{1}{2})^n$，∵n 为正偶数，$\therefore f(\frac{1}{2})<3$

5.(1)设数列$\{b_n\}$的公差为d，则$b_4=b_1+3d=2+3d=11$，解得$d=3$，数列$\{b_n\}$为 2,5,8,11,8,5,2，

(2) $S=c_1+c_2+\cdots+c_{49}=2(c_{25}+c_{26}+\cdots+c_{49})-c_{25}$

$=2\left(1+2+2^2+\cdots+2^{24}\right)-1=2\left(2^{25}-1\right)-1=2^{26}-3=67108861$.

(3) $d_{51}=2$，$d_{100}=2+3\times(50-1)=149$，由题意得 $d_1,d_2,\cdots,d_{50}$ 是首项为 149，公差为 -3 的等差数列，

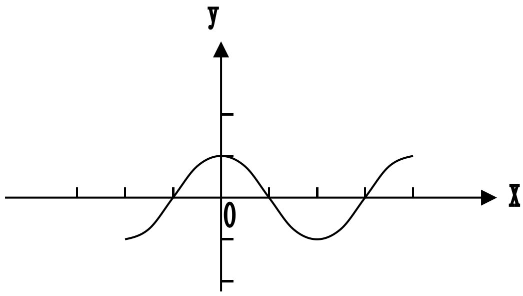
$n\leqslant 50$ 时，$S_n=d_1+d_2+\cdots+d_n=149n+\frac{n(n-1)}{2}(-3)=-\frac{3}{2}n^2+\frac{301}{2}n$，

当 $51\leqslant n\leqslant 100$ 时，$S_n=d_1+d_2+\cdots+d_n=S_{50}+\left(d_{51}+d_{52}+\cdots+d_n\right)$

$=3775+2\bullet(n-50)+\frac{(n-50)(n-51)}{2}\times 3=\frac{3}{2}n^2-\frac{299}{2}n+7500$，

综上所述，$S_n=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{301}{2}n, & 1\leqslant n\leqslant 50,\\ \dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{299}{2}n+7500, & 51\leqslant n\leqslant 100.\end{cases}$

6.（1）$S_n=5+55+555+\cdots+\overbrace{55\cdots5}^{n个}=\dfrac{5}{9}(9+99+999+\cdots+\overbrace{99\cdots9}^{n个})$



$=\dfrac{5}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)]$

$=\dfrac{5}{9}[10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n]=\dfrac{50}{81}(10^n-1)-\dfrac{5}{9}n$.

（2）$\because \dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})]=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})$.

（3）$\because a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\therefore S_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$.

（4）$S_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$，

当 $a=1$ 时，$S_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

当 $a\neq1$ 时，$S_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$，$aS_n=a^2+2a^3+3a^4+\cdots+na^{n+1}$，

两式相减得 $(1-a)S_n=a+a^2+a^3+\cdots+a^n-na^{n+1}=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-na^{n+1}$，

$\therefore S_n=\dfrac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(1-a)^2}$.

(5)$\because n(n+2)=n^2+2n$，

$\therefore$原式$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+2\times(1+2+3+\cdots+n)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

（6）设 $S=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots\cdots+\sin^2 89^\circ$，

又$\because S=\sin^2 89^\circ+\sin^2 88^\circ+\sin^2 87^\circ+\cdots\cdots+\sin^2 1^\circ$，$\therefore$ $2S=89$，$S=\dfrac{89}{2}$.

7.奇数项组成以 $a_1=1$ 为首项，公差为 12 的等差数列，

偶数项组成以 $a_2=4$ 为首项，公比为 4 的等比数列；

当 n 为奇数时，奇数项有 $\frac{n+1}{2}$ 项，偶数项有 $\frac{n-1}{2}$ 项，

$$\therefore S_n=\frac{\frac{n+1}{2}(1+6n-5)}{2}+\frac{4(1-4^{\frac{n-1}{2}})}{1-4}=\frac{(n+1)(3n-2)}{2}+\frac{4(2^{n-1}-1)}{3},$$

当 n 为偶数时，奇数项和偶数项分别有 $\frac{n}{2}$ 项，

$$\therefore S_n=\frac{\frac{n}{2}(1+6n-5)}{2}+\frac{4(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4}=\frac{n(3n-2)}{2}+\frac{4(2^n-1)}{3},$$

所以，$S_n=\begin{cases}\frac{(n+1)(3n-2)}{2}+\frac{4(2^{n-1}-1)}{3} & (n为奇数)\\ \frac{n(3n-2)}{2}+\frac{4(2^n-1)}{3} & (n为偶数)\end{cases}$.

8.（1）由题意，$\frac{1+b_{n+1}}{1-b_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+b_n}{1-b_n}+\frac{1-b_n}{1+b_n}\right)=\frac{1+b_n{}^2}{1-b_n{}^2}$，所以 $b_{n+1}=b_n^2$

所以 $\lg b_{n+1}=2\lg b_n$，又 $a_1=3\Rightarrow b_1=\frac{1}{2}$，所以数列 $\{\lg b_n\}$ 是等比数列.

(2)数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$，$T_n=\prod_{k=1}^{n}b_k=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1}$，

解 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1}\geq\frac{1}{128}$ 得 $n\leq3$，所以 $M=\{1,2,3\}$

$$(3)\ a_n=\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}}=\frac{2^{2^{n-1}}+1}{2^{2^{n-1}}-1}=1+\frac{2}{2^{2^{n-1}}-1}=1+\frac{2}{\left(2^{2^{n-2}}-1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)}$$

$$=1+\frac{1}{2^{2^{n-2}}-1}-\frac{1}{2^{2^{n-2}}+1}=\frac{2^{2^{n-2}}+1}{2^{2^{n-2}}-1}-\left(\frac{1}{2^{2^{n-2}}-1}+\frac{1}{2^{2^{n-2}}+1}\right)$$

$$=a_{n-1}-\frac{2\bullet2^{2^{n-2}}}{2^{2^{n-1}}-1}=a_{n-1}-\frac{2\left(\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}}=a_{n-1}-\frac{2\sqrt{b_n}}{1-b_n}=a_{n-1}+c_n$$ ，所以 $a_n-a_{n-1}=c_n$，

所以 $a_n-a_1=S_n-c_1$，因为 $a_1=3,c_1=-2\sqrt{2}$,所以 $a_n=S_n+3+2\sqrt{2}$.

第 13 讲 数学归纳法及其应用

1.证明：（1）对 n 归纳，$n=1$ 时 $\cot x-\cot 2x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x-\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 2x}$ 显然成立，

设 $n-1$ 时命题成立，n 时由归纳假设只需证明：

$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^{n-1}x+\frac{1}{\sin 2^n x}$.

因为 $\frac{1}{\sin 2^n x}=\frac{2\cos^2\left(2^{n-1}x\right)-\cos 2^n x}{\sin 2^n x}=\cos 2^{n-1}x-\cot 2^n x$，

则 $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^{n-1}x+\cos 2^{n-1}x-\cos 2^n x=\cos x-\cos 2^n x$.

（2）对 n 归纳，$n=1$ 时 $0=0$ 显然成立，设 $n-1$ 时命题成立，　n 时由归纳假设只需证明

$\sum_{k=1}^{n-1}k\left(n^2-(n-1)^2\right)=\frac{n^2(n-1)(n+1)-(n-1)^2(n-2)n}{4}$.

上式左边 $=(2n-1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}$，右边 $=\frac{n(n-1)}{4}\left(\left(n^2+n\right)-\left(n^2-3n+2\right)\right)=\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}$，左边=右边，故原命题成立.

（3）对 n 归纳，我们将定义域延拓为 $n>0$，n 为整数，可以看出不影响归纳过度.

$n=1$ 时命题显然成立，设 $n-1$ 时命题成立，n 时只需证明：

$\tan(n-1)\alpha\cdot\tan n\alpha=\frac{\tan n\alpha-\tan(n-1)\alpha}{\tan\alpha}-1$，由 $\tan n\alpha=\frac{\tan\alpha+\tan(n-1)\alpha}{1-\tan\alpha\tan(n-1)\alpha}$，

欲证上式右边 $=\frac{1+\tan^2(n-1)\alpha}{\left(1-\tan\alpha\tan(fn-1)\alpha\right)}-1=\frac{\left(\tan\alpha+\tan(n-1)\alpha\right)\tan(n-1)\alpha}{\left(1-\tan\alpha\tan(n-1)\alpha\right)}=\tan n\alpha\tan(n-1)\alpha$ =左边，获证.

2. $n=3$ 时，$S_3=\frac{3(a_1+a_3)}{2}=a_1+a_2+a_3$，得 $2a_2=a_1+a_3$，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列；

假设当 $n=k,k\in N^*,k\geq 3$ 时 $\{a_k\}$ 是等差数列成立，$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}$，则 $n=k+1$ 时，

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}-\frac{k(a_1+a_k)}{2}$，得 $(k-1)a_{k+1}=ka_k-a_1$，又

$ka_{k+2}=(k+1)a_{k+1}-a_1$。两式相减得：$2a_{k+1}=a_{k+2}+a_k$，$\{a_{k+1}\}$ 是等差数列，

则综上可知 $\{a_n\}$ 是等差数列.

3. $a_1=\frac{a^4-1}{a(a^2-1)}$，$a_2=\frac{a^6-1}{a(a^4-1)}$，$a_3=\frac{a^8-1}{a(a^6-1)}$，$a_4=\frac{a^{10}-1}{a(a^8-1)}$，猜测 $a_n=\frac{a^{2n+2}-1}{a(a^{2n}-1)}$

证明：当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{a^4-1}{a(a^2-1)}=\frac{a^2+1}{a}$，成立

假设当 $n=k$ 时成立，即 $a_k=\frac{a^{2k+2}-1}{a(a^{2k}-1)}$，则当 $n=k+1$ 时，有

$a_{k+1}=a_1-\frac{1}{a_k}=\frac{a^2+1}{a}-\frac{a(a^{2k}-1)}{a^{2k+2}-1}=\frac{a^{2k+4}-1}{a(a^{2k+2}-1)}$，成立。综上可知，$a_n=\frac{a^{2n+2}-1}{a(a^{2n}-1)}$

4.由条件得 $2b_n=a_n+a_{n+1}$，$a_{n+1}^2=b_nb_{n+1}$，由此可得

$a_2=6$，$b_2=9$，$a_3=12$，$b_3=16$，$a_4=20$，$b_4=25$，猜测 $a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$.

用数学归纳法证明：

①当 n=1 时，由上可得结论成立.

②假设当 n=k 时，结论成立，即 $a_k=k(k+1)$，$b_k=(k+1)^2$，

那么当 n=k+1 时，$a_{k+1}=2b_k-a_k=2(k+1)^2-k(k+1)=(k+1)(k+2)$，$b_{k+1}=\frac{a_{k+2}^2}{b_k}=(k+2)^2$.

所以当 n=k+1 时，结论也成立．由①②，可知 $a_n=n(n+1)$，$b_n(n+1)^2$ 对一切正整数都成立.

5.（1）对 n 归纳，$n=1$ 时 $9|27$，$n-1$ 时命题成立，n 时只需证明：

$9|7^n(3n+1)-7^{n-1}(3n-2)$，而右边 $=7^{n-1}(21n+7-3n+2)=9\cdot 7^n(2n+1)$ 被 9 整除.

（2）对 n 归纳，$n=1$ 时容易验证．设 $m-2$ 时成立，n 时，因为

$n^4+7(2n^2+7)-(n-2)^4-7\left[2(n-2)^2+7\right]=2(2n-2)(2n^2-4n+4)+56(n-1)$

$=8(n-1)\left((n-1)^2+8\right)$，由于 n 为奇数，所以 $8|(n-1)^2+8$，所以上式被 64 整除。从而完成了归纳过程，命题成立.

（3）对 n 归纳，$n=1$ 时命题成立，设 $n-1$ 时命题成立，n 时：

$(x+1)^{n+1}+(x+2)^{2n-1}=\left((x+1)^n-(x+2)^{2n-3}\right)(x+1)+(x+2)^{2n-3}(x^2+3x+3)$，

用归纳假设命题对 n 也成立，故原命题成立.

6.（1）$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$，$a_2>\frac{13}{24}$，$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n}>0$，故利用归纳可知结论对所有大于 1 的正整数成立.

（2）$n=1$是结论成立，设n时结论成立，$n+1$时，

$\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}+\sum_{k=2^n1}^{2n+1}\frac{1}{k}<\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}+2^n\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+n+1$命题对$n+1$成立，故原命题成立.

（3）$n=1$时结论显然成立，设 1，2。3，…，n时结论成立，$n+1$时.

$\left|\sin(n+1)x\right|\leqslant\left|\sin nx\cos x\right|+\left|\sin x\cos nx\right|\leqslant n\left|\sin x\right|+\left|\sin x\right|=(n+1)\left|\sin x\right|$ 最后一个不等号用了归纳假设．于是命题得证.

7.（1）当$n=1$时，一个圆把平面分成两部分，此时$n^2-n+2=2$，即命题成立.

（2）假设当$n=k$是时命题成立，即k个圆把平面分成k^2-k+2个部分.

（3）那么当$n=k+1$时，这个圆中的是个圆把平面分成k^2-k+2个部分．第$k+1$个圆被前k个圆分成$2k$条弧，这$2k$条弧中的每一条把所在的部分分成了 2 个部分，这时共增加了$2k$个部分，故$k+1$个圆把平面分成$k^2-k+2+2k=(k+1)^2-(k+1)+2$个部分，这说明当$n=k+1$时命题也成立.

综上所述，对一切$n\in\mathbf{N}^*$，命题都成立.

8. $1+a+a^2$；

9. $2(2k+1)$；

10. $\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$，$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

11. $1-4+9-16+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}(1+2+3+\cdots+n)$

12.错误：证明时未用归纳假设.

修正：$\sqrt{k^2+3k+2}=\sqrt{(k^2+k)+2k+2}<\sqrt{(k+1)^2+2k+2}$

$=\sqrt{k^2+4k+3}<\sqrt{k^2+4k+4}=k+2$

13.证：①当$n=1$时，等式显然成立；

②假设当$n=k$时，等式成立，即$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

当$n=k+1$时，$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$，等式也成立；

根据①②，对于任意$n\in N^*$，等式都成立.

14.(i)当$n=1$时，左边$=1=$右边，命题成立;

(ii)假设$n=k(k\geq 1,k\in \mathrm{N}^*)$时，命题成立，即$1^3+2^3+\cdots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$,

则当$n=k+1$时，$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}(k+1)^2[k^2+4(k+1)]$

$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$，由(i)(ii)可知，命题对一切$n\in \mathrm{N}^*$成立.

15.证：①当$n=1$时，$3^2-1=8$结论显然成立；

②假设当$n=k$时，结论成立，即

$3^{2k}-1$能被8整除；

当$n=k+1$时，

$3^{2(k+1)}-1=9\cdot 3^{2k}-1=9(3^{2k}-1)+8$ 显然能被8整除

结论也成立；

根据①②，对于任意$n\in N^*$，结论都成立.

16.①当$n=1$时，结论显然成立；

②假设当$n=k$时，结论成立，即$a_k=\frac{1}{k(k+1)}$

当$n=k+1$时，$a_{k+1}=\frac{S_{k+1}}{(k+1)^2}=\frac{S_k+a_{k+1}}{(k+1)^2}=\frac{k^2a_k+a_{k+1}}{(k+1)^2}$，

则$a_{k+1}=\frac{k^2a_k}{[(k+1)^2-1]}=\frac{k^2}{k\cdot(k+2)}\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$结论也成立;

根据①②，对于任意$n\in N^*$，结论都成立.

17.证：①当$n=2$时，$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$，不等式显然成立；

②假设当$n=k(k\geq 2)$时，不等式成立，即

$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$

当$n=k+1$时，

$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+k-1}+\frac{1}{(k+1)+k}+\frac{1}{(k+1)+k+1}$

$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

$=(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k})+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$

$=\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{13}{24}+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}>\frac{13}{24}$，不等式也成立；

根据①②，对于任意 $n\in N^*,n\geq 2$，不等式都成立.

第 14 讲 数列极限

1. 0；

2. D；

3.$\because \lim\limits_{n\to\infty}2na_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}\times 2na_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\times\lim\limits_{n\to\infty}(2na_n)=0$；

又$\because \lim\limits_{n\to\infty}2na_n=1$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2}$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(1-n)a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}na_n=-\frac{1}{2}$.

4. $\begin{cases}2\cdot 3^{n-2},n\in N^*\\ 1,n=1\end{cases}$

5.（1）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$；

（2）分子,分母同除以 $(-3)^n$,原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-\frac{2}{3})^n+1}{2\times(-\frac{2}{3})^n+(-3)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{2}{3})^n+\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot(-\frac{2}{3})^n+\lim\limits_{n\to\infty}(-3)}=-\frac{1}{3}$；

（3）$\because \frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

$\therefore S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$.

(4）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；

(5）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\cdots+\frac{4}{5^n})-(\frac{6}{7}+\frac{6}{7^2}+\cdots+\frac{6}{7^n})}{(\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}+\cdots+\frac{5}{6^n})-(\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\cdots+\frac{4}{5^n})}$,

注意:$\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\cdots+\frac{4}{5^n}$，$\frac{6}{7}+\frac{6}{7^2}+\cdots+\frac{6}{7^n}$，$\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}+\cdots+\frac{5}{6^n}$ 分别是等比数列的前 n 项和，

故原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{7^n}-\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{5}{7})^n-1}{1-(\frac{5}{6})^n}=\dfrac{0-1}{1-0}=-1$

6.$\because$ $0.1\dot{8}=0.1+0.08+0.008+\cdots=0.1+\dfrac{0.08}{1-0.1}=\dfrac{17}{90}$,

$0.01\dot{8}=0.01+0.008+0.0008+\cdots=0.01+\dfrac{0.008}{1-0.1}=\dfrac{17}{900}$,

$0.001\dot{8}=\dfrac{17}{9000}$,……，$\underbrace{0.00\cdots0}_{n个0}1\dot{8}=\dfrac{17}{9\times10^n}$,

原式$=\dfrac{17}{90}+\dfrac{17}{900}+\cdots+\dfrac{17}{9\times10^n}+\cdots=\dfrac{\frac{17}{90}}{1-0.1}=\dfrac{17}{81}$.

7.$\because\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}+an+b\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+a)n^2+(a+b)n+(b+1)}{n+1}=3$, $\therefore\begin{cases}1+a=0,\\a+b=3,\end{cases}$ 解得 $a=-1,b=4$.

8.$\because S_n=2n^2+3n$，$\therefore n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+3n)-\left[2(n-1)^2+3(n-1)\right]=4n+1$，

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{a_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n}{(4n+1)^2}=\dfrac{1}{8}$.

9.当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{4})$ 时，$\cos\theta>\sin\theta>0$，故 $0<\tan\theta<1$，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\tan^n\theta}{1+\tan^n\theta}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$；

当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sin\theta=\cos\theta$，故原式$=0$；

当 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 时，$0<\cos\theta<\sin\theta$，故 $0<\cot\theta<1$，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cot^n\theta-1}{\cot^n\theta+1}=-1$.

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=\begin{cases}1 & 0\leq\theta<\frac{\pi}{4}\\0 & \theta=\frac{\pi}{4}\\-1 & \frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

10(1)设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1、d_2，$\because$ $2b_2=a_2+a_3$，$\therefore$ $2d_2-3d_1=2$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+(n-1)d_1}{2+(n-1)d_2}=\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $d_2=2d_1$

$\therefore \begin{cases} 2d_2 - 3d_1 = 2 \\ d_2 = 2d_1 \end{cases} \therefore \begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = 4 \end{cases} \therefore \quad a_n = 2n+1, \quad b_n = 4n-2$

(2)$\because \quad \dfrac{1}{a_n b_n} = \dfrac{1}{(2n+1)(4n-2)} = \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1})$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a_1 b_1} + \frac{1}{a_2 b_2} + \cdots + \frac{1}{a_n b_n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{4}$$

11.依题设 $S_n = \dfrac{\frac{1}{2}(1-q^n)}{1-q}, \quad S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-q}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n - nS) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}[\frac{(1-q)}{1-q} + \frac{1-q^2}{1-q} + \cdots + \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{n}{1-q}]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{q-1}\lim_{n\to\infty}(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) = \frac{1}{2(q-1)}\lim_{n\to\infty}\frac{q(1-q^n)}{1-q} = -\frac{q}{2(1-q)^2}$$

12.解：（1）设 r_n 为圆 O_n 的半径，则 $r_1 = \dfrac{1}{2}\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$,又$\because \dfrac{r_{n-1} - r_n}{r_{n+1} + r_n} = \sin 30°$,

$\therefore r_n = \dfrac{1}{3} r_{n-1}(n \geq 2), \therefore a_1 = \pi \ r_1^2 = \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\dfrac{r_n}{r_{n-1}}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$,故 $\{a_n\}$ 是等比数列.

(2)由(1)知 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \dfrac{1}{9}$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{3\pi}{32}$.

13.由题意得，第 1 个正方形的边长 $a_1 = 1$，第 n 个正方形的边长

$$a_n = A_n B_n = \sqrt{\left(\frac{A_{n-1}B_{n-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_{n-1}B_{n-1}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a_{n-1}^{\ \ 2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_{n-1}, \quad n \geq 2 .$$

即所有正方形的边长组成的数列为$1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \cdots, \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}, \cdots$,

于是所有正方形的周长组成的数列为 $4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \cdots, 4 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}, \cdots$,

这是首项为 4、公比为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的无穷等比数列，故所有的正方形的周长之和 l 为 $l = \dfrac{4}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8 + 4\sqrt{2}$,

所有正方形的面积组成的数列为$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^{n-1}}, \cdots$，这是首项为1、公项为$\dfrac{1}{2}$ 的无穷等比数列，

故所有的正方形的面积之和 S 为 $S = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

14.$3a_n-b_n=x(3a_n-4b_n)+y(6a_n+b_n)$，

即$3a_n-b_n=(3x+6y)a_n+(-4x+y)b_n$，由$\begin{cases}3x+6y=3\\-4x+y=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\m=\dfrac{1}{3}\end{cases}$，

由此$3a_n-b_n=\dfrac{1}{3}(3a_n-4b_n)+\dfrac{1}{3}(6a_n+b_n)$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}(3a_n-4b_n)+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}(6a_n+b_n)=\dfrac{1}{3}\times 11+\dfrac{1}{3}\times(-5)=\dfrac{1}{3}\times 6=2$

15.（1）$\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^{n+1}+(a+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+(\dfrac{a+1}{3})^n}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore -1<\dfrac{a+1}{3}<1$，解得$a\in(-4,2)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{an^2+bn+c}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+\sqrt{an^2+bn+c}}{(25-a)n^2-bn-c}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\sqrt{a+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n^2}}}{(25-a)n-b-\dfrac{c}{n}}=2,$

$\therefore\begin{cases}25-a=0,\\\dfrac{5+\sqrt{a}}{-b}=2,\end{cases}$ 解得$a=25,b=-5$.

16. $\begin{cases}a_2=4\\a_4=16\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}q^2=4\\a_n>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow q=2$

$\therefore\begin{cases}a_1=2\\q=2\end{cases}\Rightarrow a_n=2^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg a_{n+1}+\cdots+\lg a_{2n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(a_{n+1}\cdot\cdots\cdot a_{2n})}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(2^{n+1}\cdot\cdots\cdot 2^{2n})}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(2^{\frac{(n+1+2n)\cdot n}{2}})}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2+n}{2n^2}\cdot\lg 2)$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\lg 2$$

17.$\{a_n\}$是以$a_1=3$，公比为c的等比数列，则$a_n=3c^{n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}-a_n}{2^n+a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}-3c^{n-1}}{2^n+3c^n}$.

当 c=2 时，原式＝$-\dfrac{1}{4}$；当 c ＞2 时，原式＝$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\dfrac{2}{c})^{n-1}-3}{2\cdot(\dfrac{2}{c})^{n-1}+3c}=-\dfrac{1}{c}$；

当 0＜ c ＜2 时，原式= $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3(\frac{c}{2})^{n-1}}{2+3c\cdot(\frac{c}{2})^{n-1}}=\dfrac{1}{2}$.

说明：当底数的大小不确定时，应进行分类讨论。

18.当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，$S_{n+1}=(n+1)a_1$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；

当 $q\neq1$，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$\therefore\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\dfrac{1-q^n}{1-q^{n+1}}$，若 $|q|>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{q^n}-1}{\frac{1}{q^n}-q}=\dfrac{1}{q}$；

若 $0<|q|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\dfrac{1-\lim\limits_{n\to\infty}q^n}{1-\lim\limits_{n\to\infty}q^{n+1}}=1$；若 $q=-1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$ 不存在.

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\begin{cases}1, & 当-1<q\le1,且q\neq0时;\\ \dfrac{1}{q}, & 当|q|>1时;\\ 不存在, & 当q=-1时.\end{cases}$

19. (1) $8S_n=(a_n+2)^2$①，$n\geq2$，$8S_{n-1}=(a_{n-1}+2)^2$②

①−②，$8a_n=a_n^2+4a_n+4-(a_{n-1}+2)^2$，$(a_n-2)^2-(a_{n-1}+2)^2=0$，

$[(a_n-2)+(a_{n-1}+2)]\cdot[(a_n-2)-(a_{n-1}+2)]=0$，

即 $(a_n+a_{n-1})\cdot[a_n-a_{n-1}-4]=0$，由 $a_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$，得 $a_n-a_{n-1}=4$

在 $8S_n=(a_n+2)^2$ 中令 $n=1$，则 $8a_1=(a_1+2)^2\Rightarrow(a_1-2)^2=0$，即 $a_1=2$

∴ $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 4 为公差的等差数列. $(a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2)$

(2) $b_n=(t-1)^{\frac{4n-2+2}{4}}=(t-1)^n$ ∴ $\{b_n\}$ 是以 $t-1$ 为首项, $t-1$ 为公比的等比数列.

由各项和的定义, 仅当 $0<|t-1|<1$ 时,各项和存在，即 $0<t-1<1\Rightarrow1<t<2$

∴ 当 $1<t<2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\dfrac{t-1}{1-(t-1)}=\dfrac{t-1}{2-t}$，当 $t\geq2$ 时, 极限不存在.

第 16 讲 数列综合

1.(1)证明：由题设 $a_{n+1}=(1+q)a_n-qa_{n-1}(n\geqslant2)$，得 $a_{n+1}-a_n=q(a_n-a_{n-1})$，$b_n=qb_{n-1}$，$n\geqslant2$.

又 $b_1=a_2-a_1=1$，$q\neq0$，所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 q 的等比数列.

(2)解：由（Ⅰ），$a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=q$，…… $a_n-a_{n-1}=q^{n-2}(n\geqslant 2)$．

将以上各式相加，得 $a_n-a_1=1+q+\cdots+q^{n-2}(n\geqslant 2)$．所以当 $n\geqslant 2$ 时，

$$a_n=\begin{cases}1+\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}, & q\neq 1,\\ n, & q=1.\end{cases}$$ 上式对 $n=1$ 显然成立.

(3)解：由（Ⅱ），当 $q=1$ 时，显然 a_3 不是 a_6 与 a_9 的等差中项，故 $q\neq 1$．

由 $a_3-a_6=a_9-a_3$ 可得 $q^5-q^2=q^2-q^8$，由 $q\neq 0$ 得 $q^3-1=1-q^6$，　　①

整理得 $(q^3)^2+q^3-2=0$，解得 $q^3=-2$ 或 $q^3=1$（舍去）．于是[来源:Z|xx|k.Com]

$q=-\sqrt[3]{2}$．$a_n-a_{n+3}=\dfrac{q^{n+2}-q^{n-1}}{1-q}=\dfrac{q^{n-1}}{1-q}(q^3-1)$，$a_{n+6}-a_n=\dfrac{q^{n-1}-q^{n+5}}{1-q}=\dfrac{q^{n-1}}{1-q}(1-q^6)$．

由①可得 $a_n-a_{n+3}=a_{n+6}-a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项，

故 $T_n=\dfrac{3n(n+1)}{2}\ln 2$．

2.(1)证明：由已知，当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{2b_n}{b_nS_n-S_n^2}=1$，又 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，所以 $\dfrac{2(S_n-S_{n-1})}{(S_n-S_{n-1})S_n-S_n^2}=1$，

即 $\dfrac{2(S_n-S_{n-1})}{-S_{n-1}S_n}=1$，所以 $\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，又 $S_1=b_1=a_1=1$．所以数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 $\dfrac{1}{2}$

的等差数列．由上可知 $\dfrac{1}{S_n}=1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n+1}{2}$，即 $S_n=\dfrac{2}{n+1}$．

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2}{n+1}-\dfrac{2}{n}=-\dfrac{2}{n(n+1)}$．因此 $b_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ -\dfrac{2}{n(n+1)}, & n\geqslant 2.\end{cases}$

(2)解：设上表中从第三行起，每行的公比都为 q，且 $q>0$．

因为 $1+2+\cdots+12=\dfrac{12\times 13}{2}=78$，所以表中第 1 行至第 12 行共含有数列 $\{a_n\}$ 的前 78 项，

故 a_{81} 在表中第 13 行第三列，因此 $a_{81}=b_{13}\bullet q^2=-\dfrac{4}{91}$．

又 $b_{13}=-\dfrac{2}{13\times 14}$，所以 $q=2$．记表中第 $k(k\geqslant 3)$ 行所有项的和为 S，

则 $S=\dfrac{b_k(1-q^k)}{1-q}=-\dfrac{2}{k(k+1)}\bullet\dfrac{(1-2^k)}{1-2}=\dfrac{2}{k(k+1)}(1-2^k)(k\geqslant 3)$．

3.(1) $\begin{cases} x_3 = 5 \\ S_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2d = 5 \\ 3x_1 + 3d = 9 \end{cases}$ $x_1 = 1 \quad d = 2$，$x_n = 2n - 1$，

(2)设 $\{b_n\}$ 的公比为 q，由已知|q|<1，且 q≠0，∴ $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{b_2}{(1-q)q} = 16$

由于 $b_2 = x_2 + 1 = 4$　　所以 $4q^2-4q+1=0$，∴ $q = \dfrac{1}{2}, b_1 = 8$，$\therefore b_n = 8\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1} = 2^{4-n}$

∵ $M_n = \lg b_1 + \lg b_2 + \cdots + \lg b_n = \lg 2^3 + \lg 2^2 + \cdots + \lg 2^{4-n} = [(3+2)+\cdots+(4-n)]\lg 2$

$= \dfrac{n(7-n)}{2}\lg 2 = -\dfrac{\lg 2}{2}[(n-\dfrac{7}{2})^2 - \dfrac{49}{4}]$，

由于 $-\dfrac{\lg 2}{2}<0$，所以当 n=3 或 n=4 时，$(M_n)_{\max} = (3+2+1)\lg 2 = 6\lg 2.$

4.(1) $\because f(1) = a = \dfrac{1}{3}, \therefore f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$，$a_1 = f(1) - c = \dfrac{1}{3} - c$，

$a_2 = \left[f(2)-c\right] - \left[f(1)-c\right] = -\dfrac{2}{9}, a_3 = \left[f(3)-c\right] - \left[f(2)-c\right] = -\dfrac{2}{27}$.

又数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，$a_1 = \dfrac{a_2^2}{a_3} = \dfrac{\frac{4}{81}}{-\frac{2}{27}} = -\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} - c$，所以 $c = 1$；

又公比 $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{3}$，所以 $a_n = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = -2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \quad n \in N^*$；

$\because S_n - S_{n-1} = \left(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}\right)\left(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}\right) = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} \quad (n \ge 2)$

又 $b_n > 0, \sqrt{S_n} > 0$，$\therefore \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1$；

数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 构成一个首相为 1 公差为 1 的等差数列，$\sqrt{S_n} = 1 + (n-1)\times 1 = n$，$S_n = n^2$

当 $n \ge 2$，$b_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$；$\therefore b_n = 2n - 1\,(n \in N^*)$；

(2) $T_n = \dfrac{1}{b_1 b_2} + \dfrac{1}{b_2 b_3} + \dfrac{1}{b_3 b_4} + \cdots + \dfrac{1}{b_n b_{n+1}} = \dfrac{1}{1\times 3} + \dfrac{1}{3\times 5} + \dfrac{1}{5\times 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right) + \cdots + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{n}{2n+1}$；

由 $T_n = \dfrac{n}{2n+1} > \dfrac{1000}{2009}$ 得 $n > \dfrac{1000}{9}$，满足 $T_n > \dfrac{1000}{2009}$ 的最小正整数为 112.

5.（1）$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n(2n+1)$，$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = (n-1)(2n-1)$，

两式相减，得 $a_n = 4n-1(n\ge 2)$，$a_1 = 3, \therefore a_n = 4n-1(n\in N)$

（2）$c_n = \dfrac{a_n}{2n+1} = \dfrac{4n-1}{2n+1} = 2 - \dfrac{3}{2n+1}, c_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{2n+3}$，

$c_{n+1} - c_n = \dfrac{3}{2n+1} - \dfrac{3}{2n+3} > 0$,即$c_{n+1} > c_n$，

（3）由（2）知 $c_1 = 1$是数列$\{c_n\}$中的最小项，

$\because x\le\lambda$时，对于一切自然数n，都有$f(x)\le 0$，即$-x^2+4x\le\dfrac{a_n}{2n+1}=c_n$，

$\therefore -x^2+4x\le c_1 = 1$，即$x^2-4x+1\ge 0$，解之得 $x\ge 2+\sqrt{3}$或$x\le 2-\sqrt{3}$，$\therefore$取 $\lambda = 2-\sqrt{3}$.

6.（1）由题意得，$2S_n = a_n^2 + a_n$ ①， 当$n=1$时，$2a_1 = a_1^2 + a_1$，解得$a_1 = 1$

当$n\ge 2$时，有$2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$ ②，①式减去②式得，$2a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + a_n - a_{n-1}$

于是，$a_n^2 - a_{n-1}^2 = a_n + a_{n-1}$，$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}) = a_n + a_{n-1}$

因为$a_n + a_{n-1} > 0$，所以$a_n - a_{n-1} = 1$，所以数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为1的等差数列

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = n$（$n\in N^*$）

(2)设存在满足条件的正整数m，则$\dfrac{n(n+1)}{2} - 1005 > \dfrac{n^2}{2}$，$\dfrac{n}{2} > 1005$，$n > 2010$

又$M=\{2000，2002，\dots，2008，2010，2012，\dots，2998\}$，

所以$m = 2010$，2012，…，2998 均满足条件，它们组成首项为2010，公差为2的等差数列

设共有k个满足条件的正整数，则$2010+2(k-1)=2998$，解得$k=495$

所以，M中满足条件的正整数m存在，共有495个，m的最小值为2010

(3)设$u_n = \dfrac{1}{S_n}$，即$u_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$，则$u_1+u_2+\cdots+u_n = \dfrac{2}{1\times 2}+\dfrac{2}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{2}{n(n+1)}$

$$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

其极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\right] = 2$

注：$u_n=\frac{c}{S_n}$（c为非零常数），$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{c\cdot S_n}{n+1}}$（$c$为非零常数），

$u_n=q^{\frac{c\cdot S_n}{n+1}}$（$c$为非零常数，$0<|q|<1$）等都能使$\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right)$存在.

7.（1）$\because a_1,a_2,a_3$成等差数列，$\therefore 2a_2=a_1+a_3$。又$\because a_1+a_2+a_3=15$，$\therefore a_2=5$。

又$\because a_4,a_5,a_6$成等比数列，$\therefore {a_5}^2=a_4\cdot a_6$。又$\because a_4a_5a_6=27$，$\therefore a_5=3$。

由$a_{n+6}=a_n$知$\{a_n\}$是以 6 为周期的数列，$\therefore a_8=a_2=5$。

（2）$S_{101}=a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{299}+a_{302}=\frac{101-1}{2}\times\left(a_2+a_5\right)+a_2=405$

8.(1)由$f(0)=2f(0)$，得$f(0)=0$，由$f(1)=2f(\frac{1}{2})$及$f(1)=1$，得$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$，

同理，$f(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，归纳得$f(\frac{1}{2^i})=\frac{1}{2^i}(i=1,2,\cdots\cdots)$；

(2)当$\frac{1}{2^i}<x\le\frac{1}{2^{i-1}}$时，$f(x)=\frac{1}{2^{i-1}}+k(x-\frac{1}{2^{i-1}})$，

$a_i=\frac{1}{2}[\frac{1}{2^{i-1}}+\frac{1}{2^{i-1}}+k(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i-1}})](\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{1}{2^i})=(1-\frac{k}{4})\frac{1}{2^{2i-1}}(i=1,2,\cdots\cdots)$，

所以$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{2}(1-\frac{k}{4})$，公比为$\frac{1}{4}$的等比数列，

所以$S(k)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{k}{4})}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}(1-\frac{k}{4})$，

$S(k)$的定义域为$0<k\le1$，当$k=1$时取得最小值$\frac{1}{2}$.

9.(1) $a_n=\frac{1}{n}$，　$\therefore$　$b_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}$，显然有$b_{n+1}>b_n$，$\therefore\ \{A_n\}$是$T$点列.

(2)在$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$中，$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}=\left(-1,a_k-a_{k+1}\right)$，$\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=\left(1,a_{k+2}-a_{k+1}\right)$，

$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=-1+\left(a_{k+2}-a_{k+1}\right)\left(a_k-a_{k+1}\right)$，$\because$　点A_2在点A_1的右上方，$\therefore$　$b_1=a_2-a_1>0$，

$\because$　$\{A_n\}$为T点列，$\therefore$　$b_n\ge b_1>0$，$\therefore$　$\left(a_{k+2}-a_{k+1}\right)\left(a_k-a_{k+1}\right)=-b_{k+1}b_k<0$，

则$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}<0$，$\therefore$　$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角，$\therefore$　$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角三角形.

10. 110；

11. 820；

12. B；

13. B；

14. C；

15. C；

16.(1)由已知条件得: $a_2=5$,又 $a_2\left|q-1\right|=10$,$\therefore q=-1$或3 ,所以数列 $\{a_n\}$ 的通项或 $a_n=5\times 3^{n-2}$ (2)

若 $q=-1$,$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}=-\frac{1}{5}$或$0$,不存在这样的正整数 m；

若 $q=3$,$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}=\frac{9}{10}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^m\right]<\frac{9}{10}$,不存在这样的正整数 m .

17.(1)$\because$ $\left|OA_n\right|=\left|OA_1\right|+(n-1)\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot n$ ，$\therefore$ $A_n(n,\quad n)$

(2)$\left|B_nB_{n+1}\right|=\frac{1}{2}\left|B_{n-1}B_n\right|=\sqrt{5}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$ ，

$\left|OB_n\right|=\left|OB_1\right|+\left|B_1B_2\right|+\cdots+\left|B_{n-1}B_n\right|=\sqrt{5}+\sqrt{5}[1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-2}]=\sqrt{5}[3-(\frac{1}{2})^{n-2}]$

$\therefore$ $B_n(3-(\frac{1}{2})^{n-2},\quad 6-(\frac{1}{2})^{n-3})$

(3) $\tan\angle A_{n+1}OB_{n+1}=\frac{2-1}{1+1\times 2}=\frac{1}{3}$ ，$\therefore$ $\sin\angle A_{n+1}OB_{n+1}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

$S(n)=\frac{1}{2}[\left|OA_{n+1}\right|\cdot\left|OB_{n+1}\right|-\left|OA_n\right|\cdot\left|OB_n\right|]\sin\angle A_{n+1}OB_{n+1}$

$=\frac{\sqrt{10}}{20}[(n+1)\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot(3-(\frac{1}{2})^{n-1})-n\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot(3-(\frac{1}{2})^{n-2})]$

$=\frac{3}{2}+(n-1)(\frac{1}{2})^n$

$\because$ $S(n)-S(n-1)=\frac{3-n}{2^n}$,$\therefore$ $n\geq 4$ 时 $S(n)$ 单调递减,又 $S(1)=\frac{3}{2}$ ，$S(2)=\frac{7}{4}=S(3)>S(4)=\frac{27}{16}$.

$\therefore$ $n=2$ 或 3 时，$S(n)$ 取得最大值 $\frac{7}{4}$.

18.(1)（法一）在 $a_n^2=S_{2n-1}$ 中，令 $n=1$ ，$n=2$ ，得 $\begin{cases}{a_1}^2=S_1,\\{a_2}^2=S_3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}{a_1}^2=a_1,\\(a_1+d)^2=3a_1+3d,\end{cases}$

解得 $a_1=1$ ，$d=2$ ，$\therefore a_n=2n-1$ ，又$\because$ $a_n=2n-1$ 时，$S_n=n^2$ 满足 $a_n^2=S_{2n-1}$ ，$\therefore a_n=2n-1$

$\because b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$ ，

$\therefore T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.

(2)①当n为偶数时，要使不等式$\lambda T_n<n+8\cdot(-1)^n$恒成立，即需不等式

$\lambda<\frac{(n+8)(2n+1)}{n}=2n+\frac{8}{n}+17$恒成立，$\because 2n+\frac{8}{n}\geq 8$，等号在$n=2$时取得，此时$\lambda$需满足$\lambda<25$，

②当n为奇数时，要使不等式$\lambda T_n<n+8\cdot(-1)^n$恒成立，即需不等式

$\lambda<\frac{(n-8)(2n+1)}{n}=2n-\frac{8}{n}-15$恒成立，$\because 2n-\frac{8}{n}$是随$n$的增大而增大，$\therefore n=1$时$2n-\frac{8}{n}$取得最小值$-6$，$\therefore$此时$\lambda$ 需满足$\lambda<-21$，综合①、②可得λ的取值范围是$\lambda<-21$.

(3) $T_1=\frac{1}{3},T_m=\frac{m}{2m+1},T_n=\frac{n}{2n+1}$，若$T_1,T_m,T_n$成等比数列，则$(\frac{m}{2m+1})^2=\frac{1}{3}(\frac{n}{2n+1})$，

即$\frac{m^2}{4m^2+4m+1}=\frac{n}{6n+3}$，由$\frac{m^2}{4m^2+4m+1}=\frac{n}{6n+3}$，可得$\frac{3}{n}=\frac{-2m^2+4m+1}{m^2}>0$，即$-2m^2+4m+1>0$，

$\therefore 1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$，又$m\in\mathbf{N}$，且$m>1$，所以$m=2$，此时$n=12$，

因此，当且仅当$m=2$，$n=12$时，数列$\{T_n\}$中的T_1,T_m,T_n成等比数列.