目录

第 1 讲 集合初步

[知识梳理]

1.集合

(1)集合：把能够确切指定的一些对象组成的整体叫做集合，一般用大写字母 A、B、C…表示.

(2)集合的元素：集合中的各个对象叫做这个集合的元素，一般用小写字母 a、b、c…表示.

(3)元素与集合的关系：要么$a \in A$，要么$a \notin A$.

(4)集合中元素的特征：

①确定性：集合是若干个确定对象的全体，得到集合中的元素应该具有确定性

②无序性：书写集合时，不关心元素之间的顺序

③互异性：集合中不出现两个相同的元素

(5)集合的分类：

①有限集：含有有限个元素的集合

②无限集：含有无限个元素的集合

③空集：不含任何元素的的集合，用$\varnothing$表示.

(6)常见的数集：自然数集 N、正整数集 N*、整数集 Z、有理数集 Q、实数集 R、正有理数集Q^+、负有理数集Q^-……

2.集合的表示方法

(1)列举法：把集合的元素一一列举出来写在大括号内表示集合的方法.

(2)描述法：用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.

(3)图示法：用一个图形围成的区域表示一个集合，这种图形叫文氏图(韦恩图).

3. 集合间的基本关系

	定义	性质说明	文氏图
子集	如果非空集合A中的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作 $A\subseteq B$，规定 $\varnothing\subseteq A$	$A\subseteq A$；$\varnothing\subseteq A$； 若 $A\subseteq B,B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$； 含有n个元素的集合有 2^n 个子集.	
真子集	如果集合A是非空集合B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作 $A\subset B$	空集是任何非空集合的真子集； 若 $A\subset B,B\subset C$，那么 $A\subset C$； n个元素的集合有 2^n-1 个真子集.	
集合相等	对于两个集合A与B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，就说这两个集合相等，记作 $A=B$	两个相等的非空集合A和B，它们的元素是完全相同的.	

4. 集合的基本运算

	定义	性质与说明	文氏图
补集	已知非空全集U，集合 $A\subseteq U$，由U中所有不属于A的元素组成的集合叫做A在U中的补集，即 $\overline{A}=\{x\mid x\in U,x\notin A\}$	$\overline{\overline{A}}=A$；$\overline{\varnothing}=U,\overline{U}=\varnothing$.	
交集	由所有属于非空集合A且属于非空集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的交集，即 $A\bigcap B=\{x\mid x\in A,x\in B\}$	$A\bigcap\varnothing=\varnothing,A\bigcap A=A$； $A\bigcap B=B\bigcap A$；$A\bigcap\overline{A}=\varnothing$； $A\bigcap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.	
并集	由所有属于非空集合A或属于非空集合B的所有元素所组成的集合，叫做A与B的并集，即 $A\bigcup B=\{x\mid x\in A,\text{或}x\in B\}$	$A\bigcup\varnothing=A,A\bigcup A=A$ $A\bigcup B=B\bigcup A$；$A\bigcup\overline{A}=U$； $A\bigcup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.	

**狄摩根定理：$\overline{A}\bigcap\overline{B}=\overline{A\bigcup B}$，$\overline{A}\bigcup\overline{B}=\overline{A\bigcap B}$，

计数原理：$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$

[典型例题]

1. (1) 已知集合 $A\subseteq\{1,2\}$，试写出所有符合条件的集合 A；

(2) 已知 $\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，试写出所有符合条件的集合 A.

2. 已知集合 $A=\{x|1\le x<3\}$，$B=\{x|2x-1>3\}$，用区间表示集合 $A\bigcap B, A\bigcup B, A\bigcap\overline{B}$.

3. (1) 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $A=\{1,3,5,8\}$，$B=\{1,2,4,8\}$，分别写出 $\overline{A\bigcap B}, \overline{A\bigcup B}, \overline{A}\bigcup\overline{B}, \overline{A}\bigcap\overline{B}$；

(2) 已知全集 $U=\{x|x\text{取不大于30的质数}\}$，集合 A,B 是 U 的两个子集，满足 $A\bigcap\overline{B}=\{5,13,23\}$，$\overline{A}\bigcap B=\{11,19,29\}$，$\overline{A}\bigcap\overline{B}=\{3,7\}$，求 A,B.

4. (1) 已知集合 $M=\{(x,y)|x-y=0\}$，$P=\{(x,y)|x+y+2=0\}$，则 $M\cap P=$________；

(2) 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0, x\in\mathbb{R}\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，满足 $A\bigcap B\ne\varnothing, A\bigcap C=\varnothing$，求实数 a 的值.

5. 已知集合 $A=[-2,5]$， $B=\{x|m+1\le x\le 2m-1\}$，

(1)若 $B\subseteq A$，求实数 m 的范围；(2) $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的范围.

6. (1)已知集合 $A=\{x|x^2+px-12=0,x\in □\}$， $B=\{x|x^2+qx+r=0,x\in □\}$，且 $A\ne B,A\cup B=\{-3,4\},A\cap B=\{-3\}$，求实数 p,q,r 的值；

(2)已知集合 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in □\}$， $B=(0,+\infty)$，且 $A\cap B=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

[配套练习]

1. ★★给出下列关系：① $\frac{1}{2}\in □$ ；② $\sqrt{2}\in □$ ；③ $3\in □$ ；④ $0\in □$ ，其中正确的序号是____________.

2. ★★无理数 π 与集合 $A=\{x|-3<2x-1<5\}$ 的关系是：____________.

3. ★★已知 $a,b\in □$ ，集合 $A=\left\{x\middle|x=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}\right\}$，用列举法表示集合 A 为____________.

4. ★★设集合 $A=\{x|x>2\},B=\{x|x\le a\}$，若 $A\cup B=□$ ，则 a 的取值范围是____________.

5. ★★已知集合 $A=\{a,b,c\}$ ，则集合 A 的真子集的个数是____________.

6. ★★数集 $\{a,a^2-a\}$ 中 a 的取值范围是____________.

7. ★★★已知集合 $A=\{x|x^2=1\}$， $B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，则 $a=$____________.

8. ★★★满足 $\{0,1\}\subseteq A\subseteq\{0,1,2,3,4,5\}$ 的集合 A 的个数为____________.

9. ★★★全集 $U=□$ ，集合 $A=(1,3)$， $B=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$，则 $A\cap\overline{B}=$____________.

10. ★★★★设集合 $A=(-1,2)$，$B=(a,a+1)$，若 $A\bigcap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是__________.

11. ★★★★已知全集 $U=\{x||x|\le 4,x\in □\}$，集合 $A=\{-3,a^2,a+1\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，其中 $a\in □$，若 $A\bigcap B=\{-3\}$，则 $\overline{A\bigcup B}=$_____________.

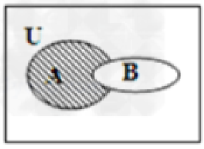
12. ★★★★已知集合 $A=\{x|3x^2+px-7=0,x\in □\}$，$B=\{x|3x^2-7x+q=0,x\in □\}$，若 $A\bigcap B=\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$，则 $A\bigcup B=$_____________.

13. ★★若集合 $\{a,a^2,ab\}=\{1,a,b\}$，则 $a^{2019}+b^{2019}=$（　　）

A. 0；B. 1；C. -1；D. 2.

14. ★★若集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{x|x=3a,a\in A\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

A. $\{1,2\}$；B. $\{0,1\}$；C. $\{0,3\}$；D. $\varnothing$.



15. ★★★右图中阴影部分表示的集合是（　　）

A. $A\bigcap\overline{B}$；B. $\overline{A}\bigcap B$；C. $\overline{A\bigcap B}$；D. $\overline{A\bigcup B}$.

16. ★★★★设集合 $A=\{x|x=3m+1,m\in □\}$，$B=\{x|x=3m+2,m\in □\}$，若 $a\in A,b\in B$，则下列结论① $a\cdot b\in A$；② $a\cdot b\notin A$；③ $a\cdot b\in B$；④ $a\cdot b\notin B$，正确的是（　　）

A. ①③；B. ①④；C. ②③；D. ②④.

17. ★★★已知 $A=\{(x,y)|y^2=ax+b\}$，$B=\{(x,y)|x^2-ay-b=0\}$，若 $\{(1,2)\}\subseteq(A\bigcap B)$，求实数 a,b 的值.

18. ★★★已知集合 $A=\{2,3\}$，$M=\{2,5,a^2-3a+5\}$，$N=\{1,3,a^2-6a+10\}$，若 $A\subseteq M,A\subseteq N$，求实数 a 的值.

19. ★★★设集合 $A=\left\{x \mid x^2+4x=0, x\in\mathbb{R}\right\}$，$B=\left\{x \mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0, x\in\mathbb{R}\right\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

20. ★★★★已知集合 $A=\left\{x \mid -2<x<4\right\}$，$B=\left\{x \mid x^2-3ax+2a^2=0\right\}$，

(1) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围；(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

21. ★★★★已知集合 $A=\left\{x \mid x^2-2x-24<0\right\}$，$B=\left\{x \mid x^2-4ax+3a^2<0\right\}$，

(1) 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围；(2) 若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围.

第 2 讲常用逻辑用语

[知识概要]

1. 命题：用陈述句表示对事物的判断，通常可以写成“如果…那么…”的形式.

2. 判断命题的真假

(1) 证明一个命题是真命题，可以直接证明，也可以用反证法等间接证明.

(2) 证明一个命题是假命题，只要举出一个满足命题条件，但不满足结论的反例即可.

3. 推出关系

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$ 表示命题 α 成立可推出命题 β 成立.

(2) 推出关系具有传递性，若 $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma$，则 $\alpha \Rightarrow \gamma$.

(3) 如果 $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \alpha$，称 α 与 β 等价，记作 $\alpha \Leftrightarrow \beta$，此时命题 α 与 β 称为等价命题.

4. 充分条件、必要条件

(1) 如果 $\alpha \Rightarrow \beta$，称 α 是 β 的充分条件，或者说 β 的充分条件是 α，充分，意味着足够，α 是 β 的充分条件是指“α 足够推出 β”，“有它即可”

(2) 如果 $\beta \Rightarrow \alpha$，称 α 是 β 的必要条件，或者说 β 的必要条件是 α，必要，意味着不可缺少，α 是 β 的必要条件是指“α 不成立推出 β 不成立”，“无它不可”.

5. 充要条件

(1) 如果既有 $\alpha \Rightarrow \beta$，又有 $\beta \Rightarrow \alpha$，即 $\alpha \Leftrightarrow \beta$，那么 α 是 β 的充分而且必要条件，简称充要条件.

(2) $\alpha \Leftrightarrow \beta$，即常说的 α, β 等价.

6. 条件的分类

(1) 如果 $\alpha \Leftrightarrow \beta$，那么 α 是 β 的充要条件.

(2) 如果 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \not\Rightarrow \alpha$，那么 α 是 β 的充分非必要条件.

(3) 如果 $\beta \Rightarrow \alpha$ 且 $\alpha \not\Rightarrow \beta$，那么 α 是 β 的必要非充分条件.

(4) 如果 $\alpha \not\Rightarrow \beta$ 且 $\beta \not\Rightarrow \alpha$，那么 α 是 β 的既非充分又非必要条件.

[典型例题]

1. 下列语句哪些是命题，哪些不是命题，是命题的判断其真假

(1)你去过静安寺么?

(2)当 $x=4$ 时，$2x<1$；

(3)若 $x\in\mathbb{R}$，则方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根；

(4) $1+2=4$ 或 $3>2$；

(5) $x<-2$ 或 $x>2$.

2. 写出下列命题的否定形式

(1)SH 中学高一 1 班的同学都是共青团员；

(2)三角形中至多有一个钝角；

(3)小岳至少在中国的 30 个城市唱过相声；

(4)小岳是复旦大学或者上海交大的毕业生；

(5)小岳在静安区住过，并且也在徐汇区住过；

(6)雪崩时，没有一片雪花是无辜的.

3. 已知命题 α：关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个相异的负实数根，命题 β：关于 x 的方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实数根，命题 α,β 有且只有一个为真命题，求实数 m 的取值范围.

4. 指出下列各命题中，p 是 q 的什么条件：

(1) $p:m=0$，q：关于 x 的方程 $x^2+2x+m=0$ 有实根；

(2) $p:x>1$ 且 $y>2$，$q:x+y>3$；

(3) $p:a\neq 1$ 或 $b\neq 2$，$q:a+b\neq 3$；

(4) $p:0<x<3$，$q:|x-1|<2$；

(5) $p:c=0$，q：抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过原点；

(6) $p:x>y$，$q:\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$.

5. 填空

(1) $xy>0$ 的一个充分非必要条件是____________；

(2) $x>2020$ 的一个必要非充分条件是___________；

(3) $a^2+b^2>0$ 的一个充分非必要条件是____________；

(4) 三个实数 a,b,c 不全为零的一个充要条件是___________.

6. 已知集合 $A=\{x|x<-3或x>5\}$， $B=\{x|a\le x\le 8\}$，

(1) 求实数 a 的取值范围，使它成为 $A\cap B=(5,8]$ 的充要条件；

(2) 求实数 a 的取值范围，使它成为 $A\cap B=(5,8]$ 的充分非必要条件；

(3) 求实数 a 的取值范围，使它成为 $A\cap B=(5,8]$ 的必要非充分条件.

7. (1) 设 $x,y\in \mathbb{R}$ ，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\ge 0$；

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，求证：关于 x 的方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $A=90°$.

［配套练习］

★★1. 条件 A：$\left(x-1\right)\left(x+2\right)=0$ ________B：$x=1$（用符号$\Rightarrow$或$\Leftarrow$连接），A 是 B 的________条件.

★★2. 条件 A：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ ________B：$b^2=ac$（用符号$\Rightarrow$或$\Leftarrow$连接），A 是 B 的____________条件.

★★3. $x>9$ 是 $x>3$ 的____________条件.

★★4. $\sqrt{x}>\sqrt{y}$ 是 $x>y$ 的___________条件.

★★5. $x^2-2x-3=0$ 的_______________条件是 $x=3$.

★★6. $a=0$ 的_______________条件是 $ab=0$.

★★★7. 写出 $x<2020$ 的一个充分非必要条件___________.

★★★8. 设 $x,y\in\mathbb{R}$，写出 $x^2=y^2$ 的一个充分非必要条件是____________.

★★★9. 设 $x\in\mathbb{R}$，则 $|x|\left(x+1\right)$ 是正数的充要条件是____________.

★★★★10. $a\le 1$ 是关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根的____________条件.

★★★★11. 下列条件中，p 是 q 的必要非充分条件的序号为____________.

① $p:x=1$ 或 $x=2$，$q:x-1=\sqrt{x-1}$；② $p:x^2=1$，$q:x=1$；

③ p:一个四边形是矩形，q:四边形的对角线相等.

★★★★12. 设条件 $\alpha:0<x<a$，$\beta:x<8-3a$，若 α 是 β 的充分非必要条件，则实数 a 的取值范围是_____.

★★13. “$x_1>3,x_2>3$”是“$x_1+x_2>6,x_1x_2>9$”的（　　）

A. 必要不充分条件；B. 充分不必要条件；C. 充要条件；D. 既不充分又不必要条件.

★★14. 若 $x\in\mathbb{R}$，设 $\alpha:x<0$，$\beta:\dfrac{|x|}{x}=-1$，则 α 是 β 的（　　）

A. 必要不充分条件；B. 充分不必要条件；C. 充要条件；D. 既不充分又不必要条件.

★★★15. 对任意 $a,b,c\in\mathbb{R}$，给出下列命题：

① $a=b$ 是 $ac=bc$ 的充要条件；②“$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件；

③ $a<4$ 是 $a<3$ 的必要条件；④ $a>b$ 是 $a^2>b^2$ 的充分条件，

其中真命题的个数为（　　）

A. 0 个；B. 1 个；C. 2 个；D. 3 个.

★★★★16. 若 p 是 q 的必要非充分条件，r 是 q 的充分非必要条件，则 p 是 r 的（　　）

A. 必要不充分条件；B. 充分不必要条件；C. 充要条件；D. 既不充分又不必要条件.

★★★17. 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

★★★18. 已知 $ab\neq 0$，求证：$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$

★★★19. 设 a,b,c 是$\triangle ABC$ 的三边长，求证：关于 x 的方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $\angle A=90°$.

★★★★20. 若 $a,b,c\in(0,2)$，求证：$a(2-b),b(2-c),c(2-a)$ 至少有一个不超过 1.

★★★★21. 记 $f(x)=x^2+ax+b$，求证：$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

第 3 讲 等式与不等式的性质

[知识梳理]

1.一元二次方程根与系数关系(韦达定理)

如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$，那么这个方程有两个实数根，即 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，可以计算得，$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

目前而言，韦达定理成立的前提是 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$；另外当 $a=1$ 时，如果 $x_1+x_2=b,x_1x_2=c$，需要构造以 x_1,x_2 为两根的方程，一般写成 $x^2-bx+c=0$.

2.确定两个实数的大小关系

(1)定义：对 $a,b\in\mathbb{R}$，$\begin{cases}a>b\Leftrightarrow a-b>0,\\ a=b\Leftrightarrow a-b=0,\\ a<b\Leftrightarrow a-b<0.\end{cases}$

(2)这是判断两个实数大小的基本方法，也是使用比较法证明不等式的理论依据.

(3)步骤：作差、变形、判断.

(4)其它判断方法，作商，对 $a,b\in R^+$，$\begin{cases}a>b\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}>1,\\ a=b\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=1,\\ a<b\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}<1.\end{cases}$

3.不等式的基本性质

(1)性质 1(传递性)：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

(2)性质 2(加法性质)：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

(3)性质 3(乘法性质)：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

4.不等式基本性质的推论

(1)推论 1(可加性)：$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；$a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$.

(2)推论 2(可乘性)：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；$a>b>0,d>c>0\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

(3)推论 3(倒数性)：$a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(4)推论 4(乘方性)：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n,n\in N^*$.

(5)推论 5(开方性)：$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b},n\in N^*$.

[典型例题]

1.设 $ab>0$，且 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，则下列各式中，恒成立的是(　　)

A. $bc<ad$；B. $bc>ad$；C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；D. $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

2.下列命题中，不正确的一个是(　　)

A. 若 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$，则 $a>b$；B. 若 $a>b,c>d$，则 $a-d>b-c$；

C. 若 $a>b>0,c>d>0$，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$；D. 若 $a>b>0,ac>bd$，则 $c>d$.

3.若 $x<y<0$，则有(　　)

A. $x^2<xy$；B. $y^2<xy<x^2$；C. $xy<y^2<x^2$；D. $y^2>x^2$.

4.当 $a>b>0$ 时，比较 $\frac{2a+b}{a+2b}$ 和 $\frac{a}{b}$ 的大小.

5.已知 $a>0,b>0$，比较 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ 与 $a+b$ 的大小.

6.已知 $a\neq -1$，比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小.

[配套练习]

★★1.关于 x 的一元二次方程 $2x^2+mx+3=0$ 的一个根是 $\dfrac{1}{2}$，则方程的另一个根是____，实数 $m=$.

★★2.一元二次方程 $4x^2-7x-3=0$ 的两根是 x_1,x_2，则 $\dfrac{x_2}{x_1+1}+\dfrac{x_1}{x_2+1}=$____________，$\left|x_1-x_2\right|=$.

★★3.已知一个一元二次方程的两个根是 $3+\sqrt{2}$ 和 $3-\sqrt{2}$，那么这个方程可以是_____________.

★★4.已知两个数的和是 10，积是 22，那么这两个数是_____________.

★★5.关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx-1=0$ 的两根是 x_1,x_2，若 $\left|x_1-x_2\right|=3$，则实数 $m=$

_________.

★★6.已知一个一元二次方程的两个根是方程 $2x^2-3x-2=0$ 两根的平方，那么这个方程可以是__.

★★★7.若 $m<2$，那么关于 x 的不等式 $(m-2)x<2-m$ 的解集为_____________.

★★★8.条件“$ac^2>bc^2$”是条件“$a>b$”的____________条件.

★★★9.若 $a=(x+1)^2$，$b=x^2+2x$，则 a,b 的大小关系是_____________.

★★★★10.若 $-1<a<b<2$，则 $a-b$ 的取值范围是_____________.

★★★★11.若 $a\in\left\{y\,\middle|\,y=x^2+1,x\in\square\right\}$，那么 $\dfrac{1}{a+1}$ 的取值范围是_____________.

★★★★12.若 $a<b<0$，那么下列结论正确的是______________.

①$a^2>b^2$；②$a^3>b^3$；③$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；④$\dfrac{a}{b}>1$；⑤$\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$；⑥$|a|>-b$.

★★13.一个一元二次方程的两个实数根是方程 $5x^2+2x-3=0$ 两根的负倒数，那么这个方程可以是

A. $3x^2+2x-5=0$；B. $3x^2-2x-5=0$；B. $3x^2+4x-5=0$；$3x^2-4x-5=0$.

★★14.关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x-(b+2)^2=0$ 有两个相等的实数根，那么以 a,b 为根的一元二次方程可以是(　　)

A. $x^2-x-2=0$；B. $x^2+x-2=0$；C. $x^2+3x+2=0$；D. $x^2-3x+2=0$.

★★★15.已知 $a,b,c,d\in\square$，且 $ab>0,\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$，则下列不等式成立的是(　　)

A. $bc<ad$；B. $bc>ad$；C. $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$；D. $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$.

★★★16.条件 $a>1,b>1$ 的一个充要条件是(　　)

A. $a+b>2,ab>1$；B. $a>2,b>0$；C. $a>0,b>0$；$a+b>2,\left(a-1\right)\left(b-1\right)>0$.

★★★17.已知关于 x 的方程 $3x^2-2\left(3k+1\right)x+3k^2-1=0$，求满足下列条件的 k 的值，

(1)方程有两个互为相反数的实根；(2)方程的两个实数根互为倒数.

★★★18.设 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $4x^2-\left(3m-5\right)x-6m^2=0$ 的两个实数根，满足 $\frac{x_1}{x_2}=-\frac{3}{2}$，求实数 m 的值.

★★★19.证明：无论实数 m 取何值，关于 x 的方程 $x^2-2mx+m-2=0$ 总有两个不相等的实数根.

★★★★20.若 $a+b>0$，比较 a^3+b^3 与 a^2b+ab^2 的大小.

★★★★21.某商品在双十一购物节期间进行降价销售活动，拟分两次降价，提供两种方案，甲方案是第一次打 a 折销售，第二次在第一次促销价的基础上再打 b 折销售；乙方案是连续两次都打 $\frac{a+b}{2}$ 折销售，问两次降价后，哪种方案使得销售价更便宜.

第 4 讲 不等式的求解 I

[知识梳理]

1.一元一次不等式的解集：

关于 x 的不等式 $ax<b$，当 $a>0$ 时的解集为 $\left(-\infty,\dfrac{b}{a}\right)$，当 $a<0$ 时的解集为 $\left(\dfrac{b}{a},+\infty\right)$.

2.一元二次不等式的求解

	$a>0,\Delta>0$ (记两根为 $x_1<x_2$)	$a>0,\Delta=0$，记根为 x_1	$a>0,\Delta<0$
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	$(-\infty,x_1)\cup(x_1,+\infty)$	□
$ax^2+bx+c<0$	(x_1,x_2)	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$	□	□
$ax^2+bx+c\leq 0$	$[x_1,x_2]$	$\{x_1\}$	$\varnothing$

[典型例题]

1.解下列不等式

(1) $6x^2-5x-1>0$；(2) $4x^2+4x-15\leq 0$；(3) $5x^2-4x+1>0$；

(4) $9x^2+6x+1>0$；(5) $3x^2-4x+2\leq 0$；(6) $4x^2-4x+1\leq 0$.

2.已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $(-\infty,-2)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，求关于 x 的不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集.

3.已知集合 $A=\left\{x\left|x^2+\left(a-1\right)x-a>0\right.\right\}$， $B=\left\{x\left|x^2+\left(a+b\right)x+ab>0\right.\right\}$，其中 $a\neq b$，

$M=\left\{x\left|x^2-2x-3\leq 0\right.\right\}$，设全集 $U=\mathbb{R}$，

(1)若 $\overline{B}=M$，求实数 a,b 的值；

(2)若 $-1<b<a<1$，求 $A\bigcap B$；

(3)若 $-3<a<-1$，且 $a^2-1\in\overline{A}$，求实数 a 的取值范围.

4.已知关于 x 的不等式 $\left(k^2+4k-5\right)x^2+4\left(1-k\right)x+3>0$ 的解集为 $\mathbb{R}$，求实数 k 的取值范围.

5.(1)关于 x 的不等式 $x^2-mx+n\leq 0$ 的解集是 $\left[-5,1\right]$，则实数 $m=$______, $n=$________；

(2)关于 x 的不等式 $ax^2+bx+1\geq 0$ 的解集是 $\left[-5,1\right]$，则实数 $a=$_________, $b=$__________.

6.(1)已知集合 $M=\left\{x\left|x^2-7x+10\leq 0\right.\right\}$， $N=\left\{x\left|x^2+\left(m-2\right)x-m+5\leq 0\right.\right\}$，满足 $N\subseteq M$，求实数 m 的取值范围；

(2)已知集合 $A=\left\{x\left|x^2+4x+p<0\right.\right\}$， $B=\left\{x\left|x^2-x-2>0\right.\right\}$，且 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

[配套练习]

★★1.不等式$\left(x-1\right)\left(2-x\right)\geq 0$的解集是____________.

★★2.不等式$\left(x-1\right)\left(x-2\right)>12$的解集是____________.

★★3.若$0<a<1$，不等式$\left(a-x\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)>0$的解集是____________.

★★4.关于x的不等式$x^2+ax+b<0$的解集为$\left(2,5\right)$，则$a+b=$__________.

★★5.若函数$y=ax^2+2ax+1$的图像与x轴无交点，则实数a的取值范围是_________.

★★6.已知全集$U=$□，集合$A=\left\{x\middle|5x^2-13x+6>0\right\}$，则$\overline{A}=$____________.

★★7.关于x的不等式$x^2+4x-a\geq 0$的解集为□，则实数a的取值范围是____________.

★★8.若函数$y=ax^2+bx+c\left(a<0\right)$的图像与$x$轴只有一个公共点$\left(x_0,0\right)$，则使函数值$y\geq 0$的所有$x$值的集合是___________.

★★9.若关于x的不等式$ax^2-\left(a+1\right)x+1<0$的解集为$\varnothing$，则$a=$____________.

★★★10.若关于x的不等式$\left(a^2-3\right)x^2+5x-2>0$的解集为$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$，则$a=$___________.

★★★11.不等式$kx^2-x+k<0$对任意实数x都成立，则k的取值范围是____________.

★★★12.二次函数$y=ax^2+bx+c,x\in$□ 的部分对应值如下表，

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是____________.

★★13. $x^2>a^2$等价于(　　)

A. $x\geq\left|a\right|$；B. $-a<x<a$；C. $x<-a$或$x>a$；D. $x>\left|a\right|$或$x<-\left|a\right|$.

★★14.若$m<n,p<q$，且$\left(p-m\right)\left(p-n\right)>0$，$\left(q-m\right)\left(q-n\right)<0$，则$m,n,p,q$的大小顺序是(　　)

A. $m<p<q<n$；B. $p<m<q<n$；C. $m<p<n<q$；D. $p<m<n<q$.

★★15.下列不等式中，解集为$\mathbb{R}$ 的不等式是(　　)

A. $4x^2-12x+9>0$；B. $4x^2-12x+9<0$；C. $2x^2+x+1<0$；D. $3x^2-2x+4>0$.

★★★16.设全集$U=\mathbb{R}$，集合$A=\left\{x\middle|x^2-5x-6>0\right\}$，$B=\left\{x\middle|-2<x<12\right\}$，则(　　)

A. $\overline{A}\bigcup B=\mathbb{R}$；B. $A\bigcup\overline{B}=\mathbb{R}$；C. $\overline{A}\bigcup\overline{B}=\mathbb{R}$；D. $A\bigcup B=\mathbb{R}$.

★★★17.解不等式组：$\begin{cases}6+x-x^2>0,\\2x^2-x-6\geq 0\end{cases}$

★★★18.已知不等式$x^2-2x-3<0$的解集为A，不等式$x^2+x-6<0$的解集为B，

(1)求$A\bigcap B$；(2)若不等式$x^2+ax+b<0$的解集是$A\bigcap B$，求$ax^2+x+b<0$的解集.

★★★19.已知集合$A=\left\{x\middle|x^2-2x-8<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x-a<0\right\}$，

(1)若$A\bigcap B=\varnothing$，求实数a的取值范围；(2) 若$A\bigcup B=B$，求实数a的取值范围.

★★★★20.已知集合$A=\left\{x\middle|2x^2+7x-15<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2+ax+b\leq 0\right\}$，满足$A\bigcap B=\varnothing$，$A\bigcup B=\left(-5,2\right]$，求实数$a,b$的值.

★★★★21.已知集合$A=\left\{x\middle|x^2-\left(a+1\right)x+a<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-5x+4<0\right\}$的解集为$B$，若$A\subseteq B$，求实数$a$的取值范围.

第 5 讲 不等式的求解 II

[知识概要]

1.同解原理

(1)如果两个不等式的解集相等，那么这两个不等式就叫做同解不等式，一个不等式变形为另一个不等式时，如果两个不等式是同解不等式，这种变形叫做不等式的同解变形.

(2)解分式不等式的关键是将它变形为同解不等式

$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0(<0)$；

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0(\le 0)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\ge 0(\le 0), \\ g(x)\ne 0 \end{cases}$.

2.分式不等式

(1)分母上带有未知数的不等式称为分式不等式.

(2)一般特征：可以化为形如$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$或$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$，其中 $f(x),g(x)$为整式， $g(x)\ne 0$的形式.

3.含绝对值不等式

(1)绝对值：一个数在数轴上所对应的点到原点的距离.

①代数意义：$|a|=\begin{cases} a, a>0, \\ 0, a=0, \\ -a, a<0 \end{cases}$

②几何意义：$|a|$表示实数 a 所对应的点到原点的距离，进一步地，$|a-b|$表示实数 a 所对应的点到 b 对应的点的距离.

(2)同解不等式：

①当实数$a>0$时，$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a, |x|>a\Leftrightarrow x<-a$或$x>a$.

②$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x), |f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$或$f(x)<-g(x)$.

③$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$

[典型例题]

1.解下列不等式：(1) $\dfrac{3x+4}{x-2}\ge 0$；(2) $\dfrac{4-2x}{1+3x}>0$；(3) $\dfrac{x-1}{2x}\le 1$.

2.若不等式 $\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$ 对一切 $x\in \mathbf{R}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

3.解下列不等式：(1) $4<|3x-1|\le 7$；(2) $|x+2|-|x-3|<4$；(3) $x^2+|x|-6<0$；(4) $\left|\dfrac{x}{x+1}\right|>\dfrac{x}{x+1}$.

4.解下列不等式：(1) $|x^2-5x+10|>x^2-8$；(2) $|x^2-4|\le x+2$；(3) $|x+3|-|2x-1|<\dfrac{x}{2}+1$.

5.(1)求函数 $y=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$ 的最小值；

(2)关于 x 的不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上的有解，求实数 a 的取值范围.

6.设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,y=\sqrt{x^2-2x-8}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,y=\dfrac{1}{\sqrt{1-|x-a|}}\right\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

[配套练习]

★★1.不等式$\dfrac{x+1}{x-2}\geq 0$的解集是____________.

★★2.不等式$\dfrac{(x+7)^2}{x-2}\geq 0$的解集是____________.

★★3.不等式$\dfrac{x+1}{2-3x}\leq 2$的解集是____________.

★★4.在平面直角坐标系内，若点$\left(2a-1,\dfrac{3a+1}{a-1}\right)$在第二象限内，则实数$a$的取值范围是__________.

★★5.已知集合$A=\left\{x\middle|\dfrac{2}{x}\geq 1\right\}$，$B=\{x|x-a>1\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则实数$a$的取值范围是________.

★★6.不等式$x+1+\dfrac{1}{3x+1}\geq 3x+\dfrac{1}{3x+1}$的解集是____________.

★★7.不等式$|2x-3|<5$的解集是____________.

★★8.已知集合$A=\{x||x|<2\}$，$B=\left\{x\middle|\dfrac{1}{x+1}>0\right\}$，则$A\cap B=$____________.

★★9.不等式$\dfrac{1}{|2x-3|}<2$的解集是____________.

★★10.不等式$\left|\dfrac{2x}{x-1}\right|>\dfrac{2x}{x-1}$的解集是___________.

★★11.不等式$\left|\dfrac{2x}{x-1}\right|<1$的解集是____________.

★★★12.设集合$A=\{x||x-a|<1\}$，$B=\{x|x^2-6x+5<0\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则实数a的取值范围是_____.

★★13.$a(a-2)<0$是$\dfrac{2}{a}>1$成立的(　　)

A. 充要条件；B. 充分非必要条件；C. 必要非充分条件；D. 既非充分又非必要条件.

★★14.设$a,b>0$，不等式$-b<\dfrac{1}{x}<a$的解集是(　　)

A. $\left(-\dfrac{1}{b},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$；B. $\left(-\dfrac{1}{a},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$；C. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{b}\right)\cup\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$；D. $\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}\right)$

★★15.已知集合 $A=\{x||x+1|<2\}$，$B=\{x|x^2-5x+6\geq 0\}$，则集合 A,B 间的关系是(　　)

A. $A=B$；B. $B\subseteq A$；C. $A\cap B=\varnothing$；D. $A\subseteq B$.

★★★16.关于 x 的不等式 $|x-4|-|x-3|\leq a$ 的解集为□，那么实数 a 的取值范围是(　　)

A. $a>1$；B. $a<1$；C. $a\leq 1$；D. $a\geq 1$.

★★★17.当实数 m 取何实数时，关于 x 的方程 $m(x-1)=3(x+2)$ 的解是负数.

★★★18.已知不等式 $(a+b)x+(2a-3b)<0$ 的解为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$，求不等式 $(a-3b)x+(b-2a)>0$ 的解集.

★★★19.关于 x 的不等式 $\dfrac{(k-1)x^2+(k-1)x+2}{x^2-x+1}>0$ 的解集是□，求实数 k 的取值范围.

★★★★20.设集合 $A=\{x|(1-|x|)(x+1)>0\}$，

(1)求集合 A；(2)设集合 $B=\{x||x|<1\}$，判断集合 A,B 之间的关系.

★★★★21.设集合 $A=\left\{x\left|\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leq\dfrac{(a-1)^2}{2}\right.\right\}$，$B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leq 0\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

第 6 讲 基本不等式及其应用

[知识梳理]

1.基本不等式

(1)定理：对于任意 $a,b\in\mathbf{R}$，总有 $a^2+b^2\ge 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立；

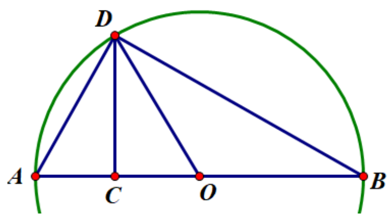
(2)平均值不等式：对于任意 $a>0,b>0$，总有 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立；

(3)定理：对于任意 $a,b\in\mathbf{R}$，总有 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立；

(4)三角不等式：对于任意 $a,b\in\mathbf{R}$，总有 $|a+b|\le|a|+|b|$，当且仅当 $ab\ge 0$ 时等号成立；

(5)平均值不等式的代数意义：把 $\dfrac{a+b}{2}$ 和 $\sqrt{ab}$ 分别叫做正数 a,b 的算术平均数和几何平均数，也就是说，两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

(4)平均值不等式的几何意义：以线段 a、b 之和为直径的半圆中，半径 OD 的长度不小于垂线段 CD 的长度.



2.基本不等式求最值的归纳

(1)根据平均值不等式，当两个正数的积为定值时，它们的和有最小值，即若 $a,b>0$，且 $ab=P$ 为定值，则 $a+b\ge 2\sqrt{P}$，说明 $a+b$ 有最小值 $2\sqrt{P}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{P}$ 时取得.

(2)根据定理，当两个数的和为定值时，它们的积有最大值，即若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b=M$ 为定值，则 $ab\le\left(\dfrac{M}{2}\right)^2$，说明 ab 有最大值 $\left(\dfrac{M}{2}\right)^2$，当且仅当 $a=b=\dfrac{M}{2}$ 时取得.

[典型例题]

例 1.设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$，并指出等号成立的条件.

变式：已知 $a,b,c>0$，求证：$a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$，并指出等号成立的条件.

例 2.已知 $x, y > 0$，求证：$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2$.

变式 1：已知 $x>0$，求证：$7-x-\frac{9}{x}\leq 1$.

变式 2：已知 $x\neq 0$，求证：$2x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{2}$.

例 3.已知 $x>0$，求 $4x+\frac{1}{x}$ 的最小值，并指出此时 x 的取值.

变式 1：已知 $x>2$，求 $x+\frac{1}{x-2}$ 的最小值，并指出此时 x 的取值.

变式 2：已知 $x>0$，求 $\frac{2x^2+5x+3}{x}$ 的最小值.

例 4.求证：对任意实数 a, b, c，求证：$|a-b|\leq|a-c|+|b-c|$.

变式 1：若 $|A-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}$，求证：$|(A+B)-(a+b)|<\varepsilon$.

变式 2：已知$|x|<\frac{a}{4},|y|<\frac{a}{6}$，求证：$|2x-3y|<a$.

[配套练习]

★★1.当a,b满足条件________时，$a-2+b-1\geq 2\sqrt{(a-2)(b-1)}$成立，当且仅当______时等号成立.

★★2.若$x>0$时，则$x+\frac{1}{x}$的最小值为___________，此时$x=$__________.

★★3.若$ab>0,a\neq b$，则$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$与 2 的大小关系是___________.

★★4.若$x<0$，则$2x+\frac{1}{x}$的取值范围是___________.

★★5.若$a,b>0$，且$a+b=4$，则ab的最大值为_______.

★★6.若$x>0$，则$\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$有最_______值，且此最值是_______.

★★★7.已知$x>1$，则$x+\frac{4}{x-1}$的最小值是__________.

★★★8.已知$x>0$，则$3-3x-\frac{1}{2x}$有最_______值，且此最值是________.

★★★9.若$x>0$，则$\frac{x}{x^2+1}$有最_________值，其次最值是_________.

★★★10.若$x>1$，则$\frac{2x^2-4x+4}{x-1}$的最小值是_________.

★★★★11.若$0<a<b$，且$a+b=1$，则实数$\frac{1}{2},a,b,2ab,a^2+b^2$中最大的一个是__________.

★★★★12.当$-2<x<0$，且$x^2\left(4-x^2\right)$取得最大值时，$x=$______________.

★★13.若实数a,b满足$a+b=2$，则3^a+3^b的最小值为(　　)

A. 18；B. 6；C. $2\sqrt{3}$；D. $2\sqrt[4]{3}$.

★★14.下列各式中，最小值是 2 的为(　　)

A. $x+\frac{1}{x}$；B. $x+2+\frac{1}{x+2}$；C. $x^2+1+\frac{1}{x^2+1}$；D. $\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$.

★★★15.若$-4<x<1$，则$\frac{x^2-2x+2}{x-1}$有(　　)

A. 最小值 2；B. 最大值 2；C. 最小值-2；D. 最大值-2.

★★★★16.制作一个面积为 1 ㎡，形状为直角三角形的铁架框，有下列 4 种长度的铁管供选择，够用且耗材最少的是(　　)

A. 4.6 米；B. 4.8 米；C. 5 米；D. 5.2 米.

★★★17.已知 $ab<0$，求证：$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\le -2$，并指出等号成立的条件.

★★★18.已知 $a,b>0$，且 $a+b=1$，求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值.

★★★19.已知直角三角形的周长为 $4+2\sqrt{2}$，求此三角形面积的最大值.

★★★★20.已知 $x>0$，求 $\frac{x}{x^2+4}$ 的最大值，并求此时 x 的值.

★★★★21.已知 $a,b>0$，证明：

(1)若 $\sqrt{a}+1>\sqrt{b}$，则对于任何大于 1 的实数 x，恒有 $ax+\frac{x}{x-1}>b$ 成立；

(2)若对于任何大于 1 的实数 x，恒有 $ax+\frac{x}{x-1}>b$ 成立，则 $\sqrt{a}+1>\sqrt{b}$.

第 8 讲 幂与指数、对数

一、知识梳理

1.指数幂的拓展：正整数指数幂、整数指数幂、有理数指数幂、实数指数幂

2.幂的运算性质：对于任意给定的正数a、b 及实数s、t，有

（1）$a^s a^t = a^{s+t}$；

（2）$\left(a^s\right)^t = a^{st}$；

（3）$(ab)^t = a^t b^t$.

3.对数的定义：当a是不等于 1 的正数，$N>0$时，N以a为底的对数$\log_a N$是满足$a^x = N$的唯一的数x.

4.对数的基本性质：设a是不等于 1 的正数，M 及N是任意给定的正数，c是任意给定的实数.

（1）$\log_a 1 = 0$；（2）$\log_a a = 1$；（3）$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$；

（4）$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$；（5）$\log_a N^c = c\log_a N$；

（5）（换底公式）如果b也是一个不等于 1 的正数，那么$\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

二、典型例题

指数幂的计算与化简

★例 1.计算（式中字母均正）

(1) $(3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-8a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}) \div (-6a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$；

(2) $(m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{3}{8}})^{16}$.

(3) $\dfrac{a^3}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^4}}$ $(a>0)$

（4） $\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}} \div \sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[3]{a^{13}}}$

★★例 2. 化简或计算：

（1）$\sqrt{x^2-4x+4} - |3-x|$ $(x<2)$

（2）$(\sqrt{x-1})^2 + \sqrt[4]{(x-1)^4} + \sqrt[3]{(1-x)^3}$

★★★例 3．若 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3,$ 求下列各式的值

（1）a^3+a^{-3}　　　　（2）$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$

★★例 4. 计算下列各式的值：

（1）$\dfrac{2\lg 2+\lg 3}{1+\frac{1}{2}\lg 0.36+\frac{1}{3}\lg 8}$　　　　（2）$\left[(1-\log_6 3)^2+\log_6 2\cdot\log_6 18\right]\div\log_6 4$

对数运算

★★例 5. 计算：

（1）$lg\,0.01^4$；　（2）$log_2(2^4\times\sqrt[3]{4})$；　（3）$lg\,2+lg\,5$；　（4）$log_3\dfrac{27}{5}+log_3\dfrac{2}{3}-log_3\dfrac{6}{5}$；

（5）$\log_9 27$　（6）$\log_{\sqrt[4]{3}} 81$　（7）$\log_{(2+\sqrt{3})}\left(2-\sqrt{3}\right)$　（8）$\log_{\sqrt[3]{5^4}} 625$

★★★例 6. 计算下列各式的值：

③　$\log_4 3\cdot\log_9 32$；　　　② $(\log_6 3)^2+\dfrac{\log_6 18}{\log_2 6}$；

③　$\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_{13.5} 3}$；　　　④ $\dfrac{\lg 2}{\log_{50} 10}+\dfrac{\lg 5}{\log_5 10}$；

★★例 7. **(1)** 如果方程 $\lg^2 x+(\lg 2+\lg 3)\lg x+\lg 2\lg 3=0$ 的两个根为 x_1,x_2，那么 x_1x_2 的值为______.

★★（2）已知 α 、β 是方程 $\lg^2 x+(\lg 3+\lg 5)\lg x+\lg 3\cdot\lg 5=0$ 的两个实根，则 $\alpha+\beta$=______.

★★★（3）设 $\lg a$，$\lg b$ 是方程 $2x^2-4x+1=0$ 的两个实数根，则 $\lg ab$=______，$lg\dfrac{a}{b}$=______.

换底公式的运用

★★例 8.（1）已知 lgx＋lgy＝2lg(2x－3y)，$\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{x}{y}$=____________.

★★★（2）若 $\lg x-\lg y=a$,则$\lg(\dfrac{x}{2})^3-\lg(\dfrac{y}{2})^3=$____________.

★★（3）已知 $\log_2[\log_3(\log_4 x)]=0$，那么 x =______________.

★★★★例 9.（1）已知 $\log_{18}2=a$，试用 a 表示 $\log_3 2$ 和 $\log_{24}2$.

★★★★（2）已知 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，试用 a、b 表示 $\log_{42}56$.

★★★★例 10.已知正数 x、y、z 满足：$3^x=4^y=6^z$，. 求证：$\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2y}$

三、基础练习

★1. $\sqrt[4]{a-2}+(a-4)^0$ 有意义，求 a 的取值范围。

★2. α,β 是方程 $2x^2+3x+1=0$ 的两根，求 $(\dfrac{1}{4})^{\alpha+\beta}$ 的值。

★★★3.已知 $2^x+2^{-x}=a$,求 8^x+8^{-x} 的值(用 a 表示).

★★4.计算（1）$0.027^{-\frac{1}{3}}-(-\dfrac{1}{7})^{-2}+256^{\frac{3}{4}}-3^{-1}+(\sqrt{2}-1)^0$ （2）$\dfrac{\lg 8+\lg 125-\lg 2-\lg 5}{\lg\sqrt{10}\lg 0.1}$

★★★5.若 lga、lgb 是方程 $2x^2-4x+1=0$ 的两个实根，求 $lgab\cdot\left|lg(\dfrac{a}{b})\right|^2$ 的值。

★★★6.若 $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x)]=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 x)]=0$，则 x、y、z 的大小关系是 （　　）

（A）$z<x<y$　（B）$x<y<z$　（C）$y<z<x$　（D）$z<y<x$

★★★★7.已知 $\dfrac{lg\,a}{p}=\dfrac{lg\,b}{q}=\dfrac{lg\,c}{r}=lg\,x\neq 0$，且 $\dfrac{b^2}{ac}=x^y$,试用 p,q,r 表示 y=_________.

★★★8.若 $log_{18}9=a$，$18^b=5$，则 $\log_{36}45=$_______. （用含有 a、b 的代数式表示）;

★★★9.已知 $\log_{12}27=k$，试用 k 表示 $\log_6 16$.

★★★10. 已知 $2.5^x=1000, 0.25^y=1000$,求 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$

四、拓展提高

★★★★1.若 $x>0, y>0$,且 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$,求 $\frac{2x+2\sqrt{xy}+3y}{x-\sqrt{xy}+y}$ 的值。

★★★★2.（1）设 $x>1, y>1$，且 $2\log_x y-2\log_y x+3=0$，则 $T=x^2-4y^2$ 的最小值为________

★★★★3. 在 $Rt\Delta ABC$ 中，a 、b 为直角边，c 为斜边。求证：

$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=2\log_{b+c}a\cdot\log_{c-b}a$ 。

五、巩固提高

★★1．下列运算正确的是

①$(-a^2)^3=(-a^3)^2$　②$(-a^2)^3=-a^5$　③$(-a^2)^3=a^5$　④$(-a^2)^3=-a^6$

⑤$(-a^2)^3=a^{3^2}$　⑥$(-a^2)^3=a^6$

★★★2. 当 $|x|<2$ 时，化简 $\sqrt{x^2}-\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+3)^2}$

★★3．已知 a<b<0,n>1,n∈N^*, 化简：$\sqrt[n]{(a-b)^n}+\sqrt[n]{(a+b)^n}$

★★4. 已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$=3，求下列各式的值:

（1）$a+a^{-1}$ ；　（2）a^2+a^{-2}

★★★5．已知 $x+y=12, xy=9$ 且 $x<y$,求 $\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$ 的值(用 a 表示).

★★6. $(\lg 2)^2+\lg 2\cdot\lg 50+\lg 25=$ __________

★★7. $\lg 25+2\lg 2+e^{\ln 2}+\log_3\dfrac{\sqrt[4]{27}}{3}$ =______________.

★★★8.已知$3^a=4^b=36$,则$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=$________.

★★★9.已知$3^a=5^b=c$，且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$，则$c=$________.

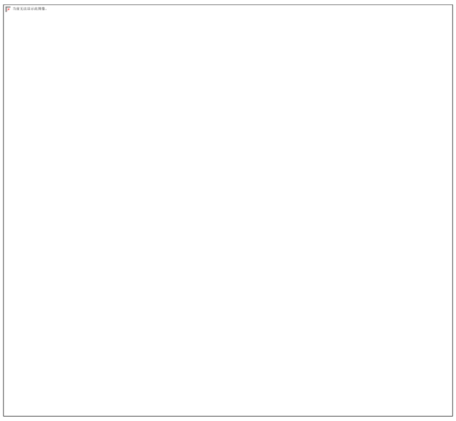
第 9 讲 幂函数

一、知识梳理

1. 幂函数 $y=x^{a}$ 的定义域由指数 a 决定. 随着指数 a 的不同, 幂函数的定义域是不同的. 特别地, 当指数 a 取有理数 $\dfrac{m}{n}$ 时(n 为正整数, m 为整数), 幂函数 $y=x^{a}$ 的定义域时使得根式 $\sqrt[n]{x^{m}}$ 有意义的 x 的全体.

2. 幂函数 $y=x^{a}$ 有单调性: 当 $a>0$ 时, 它在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数; 而当 $a<0$ 时, 它在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数.

3. 五种幂函数的图像



二、典型例题

1. 幂函数的定义

判断一个函数是否为幂函数的依据是该函数是否为 $y=x^{\alpha}$ （α 是常数）的形式，即满足：

（1）指数为常数；（2）底数为自变量；（3）系数为 1.

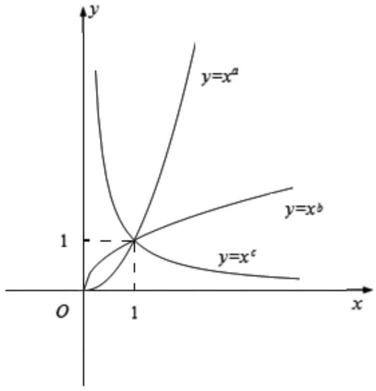
★例 1. 已知幂函数 $f(x)$ 的图像过点 $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$，试求该函数的解析式.

变式 1. 已知函数 $y=f(x)$ 是幂函数，且 $2f(4)=f(16)$，则 $f(x)$ 的解析式是____.

★★变式 2. 设 $y=f(x)$，已知幂函数 $f(x)=(m+1)^{2}x^{m^{2}-4m-2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，则函数 $f(x)$ 的解析式为____________.

2. 幂函数的图像

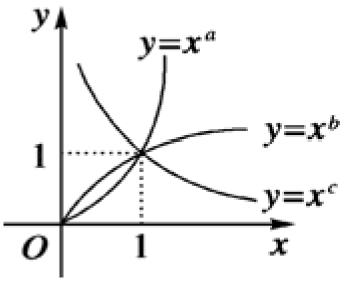
★★例 2. 已知函数 $y=x^a$， $y=x^b$， $y=x^c$ 的图像如图所示，则实数 a,b,c 的大小关系为(　　)



A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$

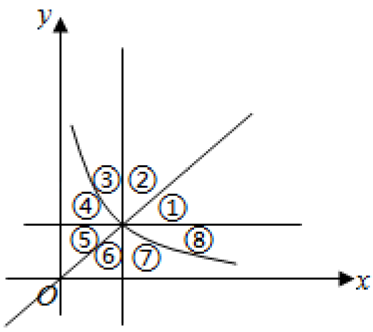
C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

★★变式 1 幂函数 $y=x^a$， $y=x^b$， $y=x^c$ 的图像如图所示，则实数 a， b， c 的大小关系为(　　)



A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $a>c>b$　　D. $b>a>c$

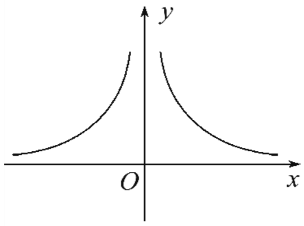
★★★变式 2 如图，函数 $y=\dfrac{1}{x}$、 $y=x$、 $y=1$ 的图像和直线 $x=1$ 将平面直角坐标系的第一象限分成八个部分：①②③④⑤⑥⑦⑧. 则函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的图像经过的部分是(　　)



A. ④⑦　　B. ④⑧　　C. ③⑦　　D. ③⑧

3. 幂函数性质的应用

★★★例 3 如图，幂函数 $y=f\left(x\right)=x^{3m-7},m\in$□ 的图像关于 y 轴对称，且与 x 轴，y 轴均无交点，求此函数的解析式，及不等式 $f(x+2)<16$ 的解集.



4. 幂函数单调性的应用

★★例 4 设 $a=(\frac{3}{5})^{\frac{2}{5}},b=(\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}},c=(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}}$，则 a,b,c 的大小关系是(　　)

A．a>c>b　　　　B．a>b>c

C．c>a>b　　　　D．b>c>a

★★变式 1 若 $a=0.5^{\frac{1}{2}}$，$b=0.5^{\frac{1}{3}}$，$c=0.5^{\frac{1}{4}}$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A．$a>b>c$　　B．$a<b<c$　　C．$a<c<b$　　D．$a>c>b$

★★★变式 2 下列大小关系，正确的是(　　)

A．$0.99^{3.3}<0.99^{4.5}$　　　　B．$\log_2 0.8<\log_3 \pi$

C．$0.53^{5.2}<0.35^{5.2}$　　　　D．$1.7^{0.3}<0.9^{3.1}$

5．求出参数后，忽略检验致错

★★★例 5. 已知幂函数 $y=x^{\frac{1}{n-3}},n\in$□$,n\geq 1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上是严格减函数，则 $n=$_______.

★★★变式 1. 设 $y=f\left(x\right)$，已知函数 $f(x)$ 是幂函数，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是严格减函数，且 $f(f(\sqrt[3]{2}))=8$，求函数 $f(x)$ 的解析式.

二、基础练习

★1．如果幂函数 f（x）=x^{α}的图像经过点$\left(3,\dfrac{1}{9}\right)$，则α=(　　)

A．－2　　B．2　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

★2．若幂函数 f（x）的图像经过点（4，$\dfrac{1}{2}$），则 f（$\dfrac{1}{4}$）的值是(　　)

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

★★3．函数$y=\dfrac{1}{x^2}$在下列哪个区间上是严格增函数(　　)

A．（－∞，0]　　B．[0，+∞）　　C．（0，+∞）　　D．（－∞，0）

★★★4．已知函数$y=f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2}}$，下列说法正确的是(　　)

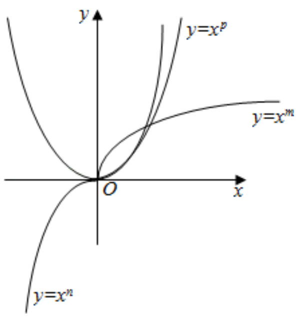
A．存在 x_0∈R，使得 f（x）<0

B．对于任意 x∈[0，+∞），f（x）≥0

C．存在 x_1，x_2∈[0，+∞），使得$\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$

D．对于任意 x_1∈[0，+∞），存在 x_2∈[0，+∞）使得 f（x_1）>f（x_2）

★★5．已知幂函数$y=x^n$，$y=x^m$，$y=x^p$的图象如图，则(　　)



A．$m>n>p$　　B．$m>p>n$　　C．$n>p>m$　　D．$p>n>m$

★★6. 已知$a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则(　　)

A．$b<a<c$　　B．$a<b<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

★★7. 若$a=(\dfrac{1}{2})^{\frac{2}{3}},b=(\dfrac{1}{5})^{\frac{2}{3}},c=(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$，则$a$、$b$、$c$的大小关系是(　　)

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$　　C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

★★★8. 已知幂函数 $y=f\left(x\right)=x^{\frac{1}{m^2+m}},m\in$□ 的图像经过点 $\left(2,\sqrt{2}\right)$，

（1）试求 m 的值，并写出该幂函数的解析式；

（2）试求满足 $f\left(1+a\right)>f\left(3-\sqrt{a}\right)$ 的实数 a 的取值范围.

三、拓展提高

★★★★1. 函数 $f\left(x\right)=(6-x-x^2)^{\frac{3}{2}}$ 在下列哪个区间是严格减函数（　　）

A. $\left[-\frac{1}{2},2\right]$　　B. $\left[-3,-\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

★★★2. (高考题) 设函数 $f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$f_2(x)=x^{-1}$，$f_3(x)=x^2$，则 $f_1(f_2(f_3(2007)))=$______.

五、巩固提高

★1. 幂函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像经过点 $\left(3,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，则 $f\left(2\right)$ 的值等于（　　）

A. 4　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

★2. 幂函数 $y=f\left(x\right)=x^{\alpha}$ 的图像经过点 $\left(3,\sqrt{3}\right)$，则实数 α =__________.

★3. 已知幂函数 $y=f\left(x\right)$ 经过点（2，8），则 f（3）=__________.

★4. 幂函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像经过点 $\left(4,\frac{1}{4}\right)$，则 $f\left(\frac{1}{4}\right)$ 的值为__________.

★★★5. 已知函数 $y=f\left(x\right)=\left(m^2-m-1\right)x^{-5m-1}$ 是幂函数，且在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上是严格增函数，

(1)求 m 的值；(2)解不等式 f（x－2）>16.

★★★6. 已知 α ∈{－2，－1，－$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$，1，2，3}，若幂函数 f（x）=x$^{\alpha}$ 的图像关于原点成中心对称，且在（0，+∞）上是严格减函数，则 α =_________.

第 10 讲　指数函数

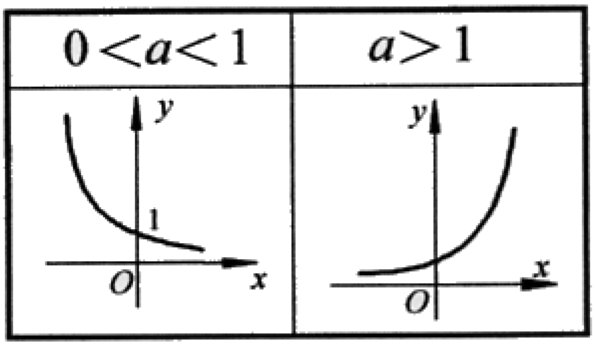
【知识梳理】

1、定义：函数 $y=a^x\,(a>0,\text{且}a\neq 1)$ 称指数函数，

(1)函数的定义域为 R；
(2)函数值恒正；

(3)当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在□ 上是严格减函数，当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在□ 上是严格增函数.

2、函数图像：



(1)指数函数的图像都经过点（0，1），且图象都在第一、二象限；
(2)指数函数都以 x 轴为渐近线（当 $0<a<1$ 时，图像向左无限接近 x 轴，当 $a>1$ 时，图像向右无限接近 x 轴）；

(3)对于相同的 $a(a>0,\text{且}a\neq 1)$，函数 $y=a^x\text{与}y=a^{-x}$ 的图像关于 y 轴对称。

【典型例题】

例 1. 函数 $y=(a^2-3a+3)a^x$ 是指数函数，求 a 的值.

例 2. 指出下列函数哪些是指数函数.

（1）$y=4^x$；（2）$y=x^4$；（3）$y=-4^x$；（4）$y=(-4)^x$；

（5）$y=(2a-1)^x(a>\dfrac{1}{2}\text{且}a\neq 1)$；（6）$y=4^{-x}$.

例 3. 求下列函数的定义域

（1） $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ ； （2） $y=0.5^{1+2x-x^2}$ （3） $\sqrt{3^{2x-1}-\frac{1}{9}}$ ；（4） $y=a^{\sqrt{\frac{2x}{x+1}-1}}$ （a 为大于 1 的常数）

例 4. 画出函数 $y=3^{-|x|}$ 的大致图像.

例 5. 已知函数 $y=f\left(x\right)=a^{x-1}$ 的图像经过点 $(2,\frac{1}{2})$ ，其中 a＞0，a≠1，

(1)求 a 的值；(2)当 $x\geq 0$ 时，求函数 $f(x)=a^{x-1}$ 的最大值.

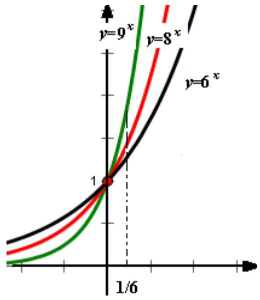
例 6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a^x, & x\geq 2 \\ (3-a)x+2, & x<2 \end{cases}$ 为 R 上的严格增函数，则实数 a 取值的范围是________.

例 7．判断下列各数的大小关系：

(1) 1.8^a 与 1.8^{a+1}；　　(2) $(\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}},3^4,(\frac{1}{3})^{-2}$

(3) $2^{2.5}$，$(2.5)^0$，$(\frac{1}{2})^{2.5}$　　(4) $a^{\sqrt{2}}$ 与 $a^{\sqrt{3}}(a>0,a\neq 1)$

例 8. 利用函数的性质，比较 $2^{\frac{1}{2}}$， $3^{\frac{1}{3}}$， $6^{\frac{1}{6}}$ 的大小.



例 9. 如果 $a^{2x+1} \le a^{x-5}$ （$a>0$，且 $a \ne 1$），求 x 的取值范围.

例 10. 设 $0<a<1$，解关于 x 的不等式 $a^{2x^2-3x+2} > a^{2x^2+2x-3}$.

例 11. 设 $f(x)=|3^x-1|$，c＜b＜a 且 $f(c)>f(a)>f(b)$，则下列关系式中一定成立的是（　　）

A. $3^a<3^b$　　B. $3^c>3^b$　　C. $3^c+3^a>2$　　D. $3^c+3^a<2$

例 12. 为了得到函数 $y=9\times3^x+5$ 的图像，可以把函数 $y=3^x$ 的图像（　　）

A. 向左平移 9 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度
B. 向右平移 9 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度
C. 向左平移 2 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度
D. 向右平移 2 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度

例 13. 某工厂今年1月，2 月，3 月生产某产品分别为1万件，1.2 万件，1.3 万件. 为了估测以后每个月的产量，以这三个月的产品数量为依据，用一个函数模拟该产品的月产量与月份数 x 的关系. 模拟函数可以选二次函数，或函数 $y=a\cdot b^x+c$（其中 a,b,c 为常数），已知 4 月份该产品的产量为1.37 万件，请问，用以上哪个函数作为模拟函数较好，并说明理由.

【配套练习】

★1．函数 $y=\left(a^2-1\right)^x$ 在 R 上是严格减函数，则 a 的取值范围是（　　）

A．$|a|>1$　　B．$|a|<2$　　C．$a<\sqrt{2}$　　D．$1<|a|<\sqrt{2}$

★2．下列判断正确的是（　　）

A．$1.7^{2.5}>1.7^{3}$　B．$0.8^2<0.8^3$；C．$\pi^2<\pi^{\sqrt{2}}$ D．$1.7^{0.3}>0.9^{0.3}$

★★3．已知 $a>b, ab\neq 0$，下列不等式中恒成立的有（　　）

（1）$a^2>b^2$；(2) $2^a>2^b$；(3) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；(4) $a^{\frac{1}{3}}>b^{\frac{1}{3}}$；(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$；

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

★★4. 用 $\min\{a,b,c\}$ 表示 a,b,c 三个数中的最小值，设函数 $y=\min\left\{2^x,x+2,10-x\right\},x\geq 0$ 的最大值为（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

★★★5．若 $a>1$，$b>0$，且 $a^b+a^{-b}=2\sqrt{2}$，则 a^b-a^{-b} 的值为（　　）

A．$\sqrt{6}$　B．2 或 -2　C．-2　D．2

★★6．已知 $0<a<1,b<-1$，则函数 $y=a^x+b$ 的图像必定不经过（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

★★★7．设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, x<1,\\ 2^x, x\geq 1.\end{cases}$ 则满足 $f(f(a))=2^{f(a)}$ 的 a 的取值范围是（　　）

A．$[\frac{2}{3},1]$　　B．[0, 1]

C．$[\frac{2}{3},+\infty)$　　D．[1, +∞）

★★8．一批设备价值 a 万元，由于使用磨损，每年比上一年价值降低 $b\%$，则 n 年后这批设备的价值为（　　）

A．$na(1-b\%)$　　B．$a(1-nb\%)$　　C．$a[1-(b\%)^n]$　　D．$a(1-b\%)^n$

★★9. 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}2^{-x}, x\in(-\infty,1)\\ x^2, x\in[1,+\infty)\end{cases}$，若 $f(x)>4$，则 x 的取值范围是________.

★★10. 已知函数 $y=f(x)=a^{|x|},x\in\mathbb{R}$，(其中 $a>0,a\neq 1$) 的函数值集合是区间 $(0,1]$，则 $f(-2)$ 与 $f(1)$ 的大小关系是________.

★★11. 函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x^2-8x+1}$ $(-3\leq x\leq 1)$ 的最大值是____________.

★★12．方程$2^{-x}+x^2=3$的实数解的个数为____________

★★★13. 已知函数$y=f\left(x\right)=2^x$的定义域是$\left[0,3\right]$，设函数$y=g\left(x\right)=f\left(2x\right)-f\left(x+2\right)$，

(1)求 g（x）的解析式及定义域；(2)若 $x\in$[0，1]，求函数 g（x）的最大值和最小值.

★★★★★14. 定义在D上的函数$y=f(x)$, 如果满足：存在常数$M>0$, 对任意$x\in D$, 都有$|f(x)|\leq M$成立, 则称$f\left(x\right)$是D上的有界函数, 其中M称为函数$f\left(x\right)$的上界，已知函数

$$y=f\left(x\right)=1+a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{4}\right)^x，\quad y=g(x)=\frac{1-m\cdot x^2}{1+m\cdot x^2},$$

(1)当$a=1$时, 判断函数$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上是否为有界函数, 请说明理由；

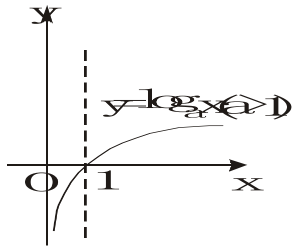
(3)若函数$f\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$上是以 3 为上界的有界函数, 求实数a的取值范围；

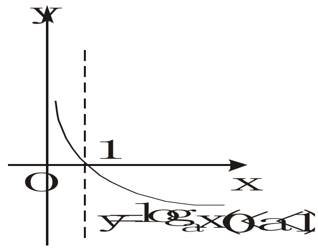
(3)已知$m>-1$, 函数$g\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上的上界是$T(m)$, 求$T(m)$的取值范围.

第 11 讲 对数函数

【知识梳理】

1、定义：函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）叫做对数函数，其中 x 是自变量，图像如下





2、对数函数的性质：
定义域：（0，$+\infty$）；　函数值可取遍全体实数；　过点（1，0），即当 x=1 时，y=0.
当 $a>0$ 时，在（0，$+\infty$）上是严格增函数；当 $0<a<1$ 时，在（0，$+\infty$）上是严格减函数。

3、对数函数与指数函数的关系

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

【典型例题】

例 1. 下列函数中，哪些是对数函数？

（1）$y=\log_a \sqrt{x}(a>0,a\neq 1)$；

（2）$y=\log_2 x+2;$

（3）$y=8\log_2(x+1)$；

（4）$y=\log_x 6(x>0,x\neq 1)$；

（5）$y=\log_6 x$.

例 2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_a x^2$；

(2) $y=\log_a(4-x)(a>0\text{且}a\neq 1)$.

(3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}}$.

例 3．利用对数函数的性质比较 $3^{0.2}$ 、$\log_3 2$ 、$\log_5 4$ 的大小.

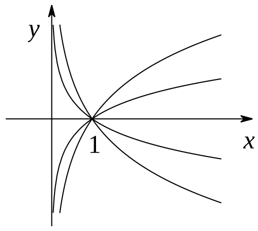
例 4. 设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2$，$b=\log_{\frac{1}{2}}3$，$c=(\frac{1}{3})^{0.3}$，则（　　）

A.　$a<b<c$ B.　$a<c<b$ C.　$b<c<a$ D.　$b<a<c$

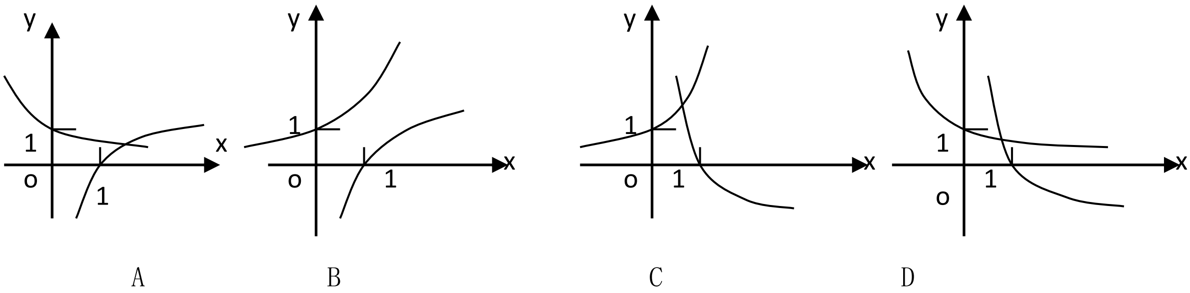
例 5. 图中的曲线是 $y=\log_a x$ 的图像，已知 a 的值为 $\sqrt{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{1}{5}$，则相应曲线 C_1,C_2,C_3,C_4 的 a 依次为(　　)

A. $\sqrt{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{10}$　　B. $\sqrt{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{5}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{4}{3}$，$\sqrt{2}$　　D. $\frac{4}{3}$，$\sqrt{2}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{1}{5}$



例 6. 当 $0<a<1$ 时, 在同一坐标系中, 函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图像是(　　)



例 7. 设 $a>1$，函数 $y=f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B.　2　　C.　$2\sqrt{2}$　　D.　4

例 8. 若 $\log_{\frac{2}{3}}a<1$，则 a 的取值范围是__________

例 9. 若 $\log_m 3<\log_n 3$，求 m 和 n 的关系。

例 10. 已知函数 $y=f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$.

（1）若函数 $f(x)$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 的函数值可取遍全体实数，求实数 a 的取值范围.

例 11. 已知 x 满足 $a^{2x}+a^{6}\le a^{x+2}+a^{x+4}(a>0,a\ne 1)$，函数 $y=\log_a\dfrac{1}{a^2x}\cdot\log_{\frac{1}{a^2}}(ax)$ 的值域为 $[-\dfrac{1}{8},0]$，求实数 a 的值.

例 12. 已知 $a>0$ 且 $a\ne 1$，当关于 x 的方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解时，求实数 k 的取值范围.

例 13. 设 $x\in[2,8]$，函数 $y=\dfrac{1}{2}\log_a(ax)\cdot\log_a(a^2x)$ 的最大值是 1，最小值是 $-\dfrac{1}{8}$，求实数 a 的值.

【配套练习】

★1．若 $\log_a\dfrac{2}{5}<1$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$0<a<\dfrac{2}{5}$　B．$a<\dfrac{2}{3}$ 或 $a>1$　C．$\dfrac{2}{5}<a<1$　D．$0<a<\dfrac{2}{5}$ 或 $a>1$

★2．函数 $y=\sqrt{1-\ln x}$ 的定义域为（　　）

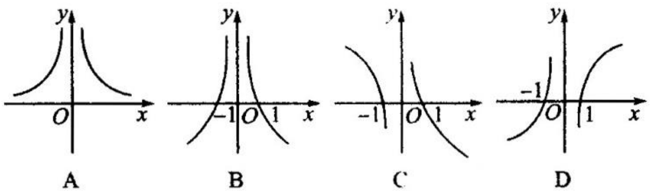
A．（0，e]　B．（－∞，e]　C．（0，10]　D．（－∞，10]

★★3．下列各式错误的是（　　）.

A．$3^{0.8}>3^{0.7}$　B．$0.75^{-0.1}<0.75^{0.1}$

C．$\log_{0..5}0.4>\log_{0..5}0.6$　D．$\lg 1.6>\lg 1.4$.

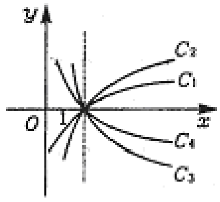
★★4．函数 $y=\dfrac{x}{|x|}\log_2|x|$ 的大致图像是（　　）



★★5．设 $a=\log_5 4$，$b=\left(\log_5 3\right)^2$，$c=\log_4 5$，则（　　）.

A． $a<c<b$　　B． $b<c<a$　　C． $a<b<c$　　D． $b<a<c$

★★6．图中曲线是对数函数 $y=\log_a x$ 的图像，已知 a 值取 $\sqrt{3},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{1}{10}$，则相应于 C_1，C_2，C_3，C_4 的 a 值依次为（　　）



A． $\sqrt{3},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{1}{10}$　　B． $\sqrt{3},\frac{4}{3},\frac{1}{10},\frac{3}{5}$

C． $\frac{4}{3},\sqrt{3},\frac{3}{5},\frac{1}{10}$　　D． $\frac{4}{3},\sqrt{3},\frac{1}{10},\frac{3}{5}$

★★7．函数 $y=f(x)=\log_2(3^x+1)$ 的值域为（　　）

A． $\left(0,+\infty\right)$　　B． $\left[0,+\infty\right)$　　C． $\left(1,+\infty\right)$　　D． $\left[1,+\infty\right)$

★★8．已知 $\log_{\frac{1}{2}} b<\log_{\frac{1}{2}} a<\log_{\frac{1}{2}} c$，则（　　）

A. $2^b>2^a>2^c$　　B. $2^a>2^b>2^c$　　C. $2^c>2^b>2^a$　　D. $2^c>2^a>2^b$

★★9．函数 $y=f(x)=\log_a(2x+1)+2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）必过定点________.

★★★10．已知 $\log_m 7<\log_n 7<0$，则 m、n、0、1 间的大小关系是_________。

★★★11．已知函数 $y=f(x)=\log_a(1-x)+\log_a(x+3)$ 其中 $a\in(0,1)$，

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域；(2)若函数 $f(x)$ 的最小值为 -4，求 a 的值.

★★★★12．设 $y=f(x)=ln(x+1)$.

(1)求满足 $f(1-x)>f(x-1)$ 的 x 的取值的集合 A；

(2)设集合 $B=\{x\mid 1-m<x<2m\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

第 12 讲 函数

【知识梳理】

1．定义

设 A 、 B 是非空数集，如果按照某个确定的对应关系 f ，使得对于集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 与之对应，那么就称 $f:A\to B$ 为集合 A 到集合 B 的一个函数(function)，记作 $y=f(x),x\in A$ ，其中 x 叫做自变量(independent variable)， y 叫作应变量(dependent variable)， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域(domain)，与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值(function value)，函数值的集合 $\{y\mid y=f(x),x\in A\}$ 叫做函数的值域(range).

一般地，函数的定义域是由问题的实际背景所确定的.如果只给出函数的解析式 $y=f(x)$ ，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的集合.

2．函数的三要素：定义域、对应关系和值域

①构成函数的三个要素是定义域、对应关系和值域.由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，即称这两个函数相等(或为同一函数)；

②两个函数相等当且仅当它们的定义域和对应关系完全一致，而与表示自变量和函数值的字母无关.

3.函数的表示方法：解析法（含分段表示法），列表法，图像法

【典型例题】

例 1：下列式子是否能确定 y 是 x 的函数？

（1） $x^2+y^2=2;$

（2） $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1;$

（3） $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$.

例 2．下列函数 f（x）与 g（x）是否表示同一个函数，为什么？

（1） $f(x)=(x-1)^0$ ； $g(x)=1$

（2） $f(x)=x$ ； $g(x)=\sqrt{x^2}$

（3） $f(x)=x^2$ ； $g(x)=(x+1)^2$

（4） $f(x)=|x|$ ； $g(x)=\sqrt{x^2}$

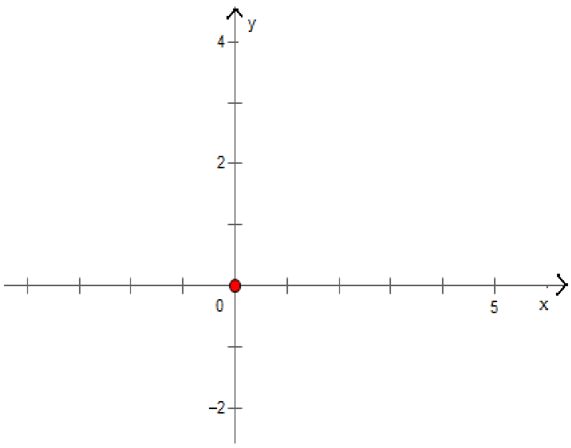
例 3. 求下列函数的定义域:

（1） $y=\sqrt{x+8}+\sqrt{3-x}$;

（2） $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}}{x-1}$;

（3） $y=\dfrac{(x-1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$.

例 4．已知函数 $f(x)=|x-1|+1$



（1）用分段函数的形式表示该函数;（2）画出该函数的图象

例 5. 作出下列函数的图象.

（1） $y=1-x(x\in\{-2,-1,0,1,2\})$;（2） $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$;（3） $y=|x^2-2x|+1$.

例 6.（1）作出函数 $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$ 的图象

（2）作出函数 $f(x)=\dfrac{2-|x|}{|x|-1}$ 的图象

例 7. 函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, x\le -1, \\ x^2, -1<x<2, \\ 2x, x\ge 2. \end{cases}$ 中，若 $f(x)=3$，则 x 的值为（　　）.

A. 1　　B. 1 或 $\dfrac{3}{2}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

例 8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2x\ ,x>0 \\ x+1\ ,x\le 0 \end{cases}$，若 $f(a)+f(1)=0$，则实数 a 的值等于（　　）

A. －3　　B. －1　　C. 1　　D. 3

例 9. 已知 $f(x)=2x^2-3x-25$，$g(x)=2x-5$，求：

(1) $f(2)$，$g(2)$；　(2) $f(g(2))$，$g(f(2))$；　(3) $f(g(x))$，$g(f(x))$

例 10. 已知 $f(x+1)=x^2+4x+2$，求 $f(x)$.

例 11. 求下列函数的解析式

(1)若 $f(x)=x^2+2x$，求 $f(2x+1)$；

(2)若 $f(x+1)=2x^2+1$，求 $f(x)$；

(3)已知 $f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x+2$，求 $f(x)$.

例 12. 对于在区间 $[m,n]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，如果对任意的 $x\in[m,n]$，均有 $|f(x)-g(x)|\le 1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m,n]$ 上是接近的，否则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m,n]$ 上是非接近的，现有两个函数 $f_1(x)=\log_a(x-3a)$ 与 $f_2(x)=\log_a\frac{1}{x-a}(a>0,a\ne 1)$，给定区间 $[a+2,a+3]$。

（1）若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间 $[a+2,a+3]$ 上都有意义，求 a 的取值范围；

（2）讨论 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间 $[a+2,a+3]$ 上是否是接近的。

【配套练习】

★1．函数 $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ 的定义域为（　　）

A．$[0,\frac{3}{2}]$　B．[0，3]　C．[-3，0]　D．(0，3)

★2．若 $f[g(x)]=9x+3$，且 $g(x)=3x+1$，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A．$3x$　B．3　C．$9(3x+1)+1$　D．$3(9x+3)+1$

★★3．已知 $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}$ $(x\neq0)$，则 $f(0.5)=$（　　）

A．1　B．3　C．15　D．30

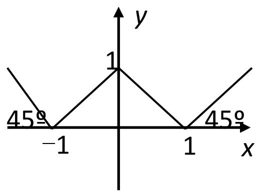
★★4．若函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f(2)=m$，$f(3)=n$，则 $f(72)=$（　　）

A．$6mn$　B．m^3+n^2　C．$2m+3n$　D．$3m+2n$

★★5．函数 $y=f(x)$ 的图象如题图所示，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A．$\sqrt{x^2-2x+1}$　B．$\sqrt{x^2-2|x|+1}$

C．$|x^2-1|$　D．x^2-2x+1



★★6．若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，且 $b>-a>0$，则函数 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 的定义域是（　　）

A．$[a,b]$　B．$[-b,-a]$

C．$[-b,b]$　D．$[a,-a]$

★★★7．若 $f(2x+3)$ 的定义域是 $\{x|-4\leq x<5\}$，则函数 $f(2x-3)$ 的定义域是__________.

★★8．求函数 $y=\sqrt{\log_{2x+1}(33-2^x)}$ 的定义域.

★★★9．动点 P 从边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 出发顺次经过 B、C 移动一周回到 A 点，设 x 表示点 P 的行程，y 表示线段 PA 的长，试求 y 关于 x 的函数式.

★★★10．若函数 $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-5}}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为 R，求实数 k 的取值范围.

★★★★11．已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$（a，b 为常数，且 $a\neq0$）满足 $f(2)=1$，$f(x)=x$ 只有惟一实数解，试求函数 $y=f(x)$ 的解析式及 $f[f(-3)]$ 的值．

★★★★★12．定义在（0，+∞）上的函数 $f(x)$ 满足：

①$f(2)=1$；

②$f(xy)=f(x)+f(y)$，其中 x、y 为任意正实数；

③任意正实数 x、y 满足 $x>y$ 时，$f(x)>f(y)$．

试回答下列问题：

（1）求 $f(1)$、$f(4)$；

（2）试判断函数 $f(x)$ 为单调性；

（3）如果 $f(x)+f(x-3)\leqslant2$，试求 x 的取值范围．

第 13 讲 函数的基本性质 I

【知识梳理】

一、函数奇偶性

1.函数奇偶性的定义：如果对于函数 $f(x)$ 的定义域 D 内任意实数 a，都有 $f(-a)=f(a)$ 成立，那么就把函数 $f(x)$ 叫做偶函数(even function).

类似的，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域 D 内任意实数 a，都有 $f(-a)=-f(a)$ 成立，那么就把函数 $f(x)$ 叫做奇函数(odd function).

2.奇偶函数的性质：

（1）函数具有奇偶性的必要条件是其奇函数或偶函数前提：定义域关于原点对称；

（2） $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 的图像关于 y 对称；

$f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 的图像关于原点对称.

3.用定义判断函数奇偶性的步骤

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域，判断函数的定义域是否关于原点对称，若不关于原点对称，则该函数既不是奇函数，也不是偶函数，若关于原点对称，则进行下一步；

（2）结合函数 $f(x)$ 的定义域，化简函数 $f(x)$ 的解析式；

（3）求 $f(-x)$，可根据 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 之间的关系，判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

二、函数的单调性

1. 函数单调性的定义：如果函数 $f(x)$ 对区间 D 内的任意 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)\le f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 内是增函数；当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)\ge f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 内是减函数.

特别地，如果函数 $f(x)$ 对区间 D 内的任意 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 内是严格增函数；当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 内是严格减函数.

2. 单调区间的定义：如果函数 f(x)在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 f(x)在区间 D 上具有单调性， D 称为函数 f(x)的单调区间.

3．单调性定义的等价形式：

任取 $x_1,x_2\in[a,b]$，

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 是严格增函数；

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 是严格减函数；

$(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))<0 \Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$是严格减函数.

3. 复合函数的单调性：同增异减.

4. 证明函数单调性的步骤

(1)取值. 设x_1，x_2是$f(x)$定义域内一个区间上的任意两个量，且$x_1<x_2$；

(2)变形. 作差变形（变形方法：因式分解、配方、有理化等）或作商变形；

(3)定号. 判断差的正负或商与 1 的大小关系；

(4)得出结论.

【典型例题】

例 1、判断下列函数奇偶性

（1）. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

（2）. $y=\sqrt{x}$

（3）. $y=x^{\frac{2}{3}}$

（4）. $y=\dfrac{x^3+x^2}{x+1}$

（5）. $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

（6）. $y=2^x+2^{-x}$

【拓展】(7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$；

【拓展】(8) $f(x)=\begin{cases}-x^2+x(x\ge 0)\\ x^2+x(x<0)\end{cases}$；　　.

例 2、判断下列函数单调性：

(1) $F(x)=f(x)+f(-x)$, $(x\in R)$

(2) $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$, $(x\in R)$

例 3、（1）若函数 $y=f(x)(x\in R)$ 是奇函数，则下列各点中在函数 $y=f(x)$ 的图像上（　　）

A．$(a,-f(a))$　B．$(-a,f(a))$　C．$(a,f(-a))$　D．$(-a,-f(a))$

（2）设函数 $f(x)$ 和 g(x)分别是 R 上的偶函数和奇函数，则下列结论恒成立的是 （　　）．

A．$f(x)$+|g(x)|是偶函数　B．$f(x)$-|g(x)|是奇函数

C．|$f(x)$| +g(x)是偶函数　D．|$f(x)$|- g(x)是奇函数

例 4、已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+4}{x}$

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒大于 0，求 a 的取值范围.

例 5、（1）根据函数单调性的定义，证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格减函数.

（2）已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$x\geq 1$，判断 $f(x)$ 的单调性，并用单调性的定义加以证明.

（3）已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x-1}$ $(a>0)$．判断函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的单调性，并用单调性的定义加以证明；

例 6、给出下列函数的单调区间；

(1) $y=\dfrac{1}{2x-1}$；

(2) $y=\dfrac{1}{x^2}$

(3) $y=x^2-3|x|+2$；

(4) $y=|x-1|+\sqrt{(x-2)^2}$

例 7.（1）已知函数 $f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{2}}x$，则 $f\left(2x-x^2\right)$ 的递增区间为_______.

（2）已知 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-4a, x<1\\ \log_a x, x\geq 1\end{cases}$ 是 R 上的严格增函数，求 a 的取值范围.

例 8. 设 $a>0$，$f(x)=\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}$ 是 R 上的偶函数。

（1）求 a 的值；（2）证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格增函数。

【拓展】

例 9．已知函数 $f(x), x\in R$，若对于任意实数 a,b 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，判断 $f(x)$ 的奇偶性.

例 10. 已知 $f\left(x\right)$ 是定义在□ 上的严格增函数，对任意 $x\in$□ 有 $f\left(x\right)>0$，且 $f\left(5\right)=1$，设 $F\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{1}{f\left(x\right)}$，讨论函数 $F\left(x\right)$ 的单调性，并证明你的结论.

【配套练习】

★1．函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$ 是（　　）

A．奇函数　　B．偶函数

C．既是奇函数又是偶函数　　D．既不是奇函数又不是偶函数

★2．设函数 $f(x)=ax^3+bx-1$，且 $f(-1)=3,$ 则 $f(1)$ 等于（　　）

A. -3　　B. 3　　C. -5　　D. 5

★★3．若偶函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-1\right]$ 上是严格增函数，则下列关系式中成立的是（　　）

A．$f(-\dfrac{3}{2})<f(-1)<f(2)$　　B．$f(-1)<f(-\dfrac{3}{2})<f(2)$

C．$f(2)<f(-1)<f(-\dfrac{3}{2})$　　D．$f(2)<f(-\dfrac{3}{2})<f(-1)$

★★4. 如果奇函数 $f(x)$ 在区间$[3,7]$上是严格增函数，且最大值为5，那么 $f(x)$ 在区间$\left[-7,-3\right]$上是(　　)

A. 严格增函数且最小值是-5　　B. 严格增函数且最大值是-5

C. 严格减函数且最大值是-5　　D. 严格减函数且最小值是-5

★★5. 函数 $f(x)=(2a-1)x+b$ 是 R 上的严格减函数，则 a 的范围为(　　)

A. $a\geq\frac{1}{2}$　　B. $a\leq\frac{1}{2}$　　C. $a>-\frac{1}{2}$　　D. $a<\frac{1}{2}$

★★6. 函数 $y=\frac{x^2}{x-1}$ （$x\in\mathbf{R}$， $x\neq1$）的单调递增区间是（　　）

A. $x\geqslant2$　　B. $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant2$　　C. $x\leqslant0$ D. $x\leqslant1-\sqrt{2}$ 或 $x\geqslant\sqrt{2}$

★★7. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+2$ 是定义在[1+a，1]上的偶函数，则 a+2b=（　　）

A. 0　　B. 2　　C. －2　　D. $\frac{1}{2}$

★★8. 如果函数 $f(x)=x-\frac{2}{x}+a$ 为奇函数，那么 $a=$________________.

★★9. 已知 $f(x)=\frac{a}{a^2-2}\cdot(a^x-a^{-x})$ ($a>0$ 且 $a\neq1$) 是 上的严格增函数. 则实数 a 的取值范围是( )

A. $(0，1)$　　B. $(0，1)\cup\left(\sqrt{2}，+\infty\right)$

C. $\left(\sqrt{2}，+\infty\right)$　　D. $(0，1)\cup\left[\sqrt{2}，+\infty\right)$

★★★10. 函数 $y=|1+2x|+|2-x|$ 的单调递减区间是____________

★★★11. 函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(2)=0$，$f(x)$ 在$\left[0,1\right]$上是严格增函数，在$\left(1,+\infty\right)$上是严格减函数，则不等式 $f(x)\geq0$ 的解集为________.

★★12. 若函数 $f(x)=(k-2)x^2+(k-1)x+3$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的递减区间是____________.

★★★13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\geq0\\ g(x), & x<0\end{cases}$，且函数 f（x）为奇函数，则 g（－2）=______.

★★14. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $f(x)$ 的图象经过点 $A(0，3)$ 和点 $B(3，-1)$，则不等式 $|f(x+1)-1|<2$ 的解集为_________.

★★15. 试用函数单调性的定义判断函数 $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ 在区间$(0，1)$上的单调性.

★★★16. 已知函数 $f\left(x\right)=\left|x+a\right|-\left|x-a\right|\left(a\neq 0\right)$，试判断 $f\left(x\right)$ 的奇偶性.

★★★17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$.

（Ⅰ）证明： $f(x)$ 是奇函数；

（Ⅱ）用函数单调性的定义证明： $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格增函数.

★★★18. 设函数 $f\left(x\right)$ 在 R 上是偶函数，在区间 $\left(-\infty，0\right)$ 上是严格增函数，且有 $f\left(2a^2+a+1\right)<f\left(3a^2-2a+1\right)$，求 a 的取值范围.

【拓展】

★★★★19. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，且满足对于定义域内任意的 x_1,x_2，都有等式

$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 成立.

(1)求 $f(1)$ 的值；

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明；

(3)若 $f(4)=1$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数，解关于 x 的不等式 $f(3x+1)+f(2x-6)\leq 3$

★★★★20．已知函数 f（x）的定义域为（0，+∞），且对任意的正实数 x，y 都有 f（xy）=f（x）+f（y），且当 x＞1 时，f（x）＞0，f（4）=1，

（1）求证：f（1）=0；

（2）求 $f(\frac{1}{16})$；

（3）解不等式 f（x）+f（x—3）≤1．

第 14 讲 函数的基本性质 II

【知识梳理】

函数的最大（小）值

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 M 满足：

(1) 对于任意的 $x\in I$ ，都有 $f(x)\le M$ （或 $f(x)\ge M$ ）；

(2) 存在 $x_0\in I$ ，使得 $f(x_0)=M$ ，那么，我们称 M 是函数的最大值（或最小值）.

要点诠释：

①最值首先是一个函数值，即存在一个自变量 x_0 ，使 $f(x_0)$ 等于最值；

②对于定义域内的任意元素 x ，都有 $f(x)\le f(x_0)$（或 $f(x)\ge f(x_0)$），“任意”两字不可省；

③使函数 $f(x)$ 取得最值的自变量的值有时可能不止一个；

④函数 $f(x)$ 在其定义域（某个区间）内的最大值的几何意义是图象上最高点的纵坐标；最小值的几何意义是图象上最低点的纵坐标.

【典型例题】

例 1. 求 $f(x)=x^2-2ax-1$ 在区间[0，2]上的最大值和最小值.

例 2. 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$

(2) $y=\sqrt{-x^2+2x+8}$ ；

(3) $y=4x+\sqrt{3x-1}-2$ ；

(4) $y=(\dfrac{1}{4})^{2-x}$

(5) $y=\log_2(1-x^2)$

例 3. 已知 $f(x)=3x^2-12x+5,$ 当 $f(x)$ 的定义域为下列区间时，求函数的最大值和最小值.

（1）[0，3]；（2）[-1，1]；（3）[3，+∞）.

例 4. 已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2$，$x\in[-5，5]$，

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的最大值和最小值；
(2)求实数 a 的取值范围，使 $y=f(x)$ 在区间[－5，5]上是单调函数.

例 5. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3,(-3\le x<0)\\-3x+3,(0\le x<1)\\-x^2+6x-5,(1\le x\le 6)\end{cases}$

（1）画出这个函数的图象；（2）求函数的单调区间；（3）求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

例 6．定义在实数集上的函数 $y=f(x)$ 是偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2+4x$.

（1）求 $f(x)$ 在 R 上的表达式；
（2）求 $y=f(x)$ 的最大值，并写出 $f(x)$ 在 R 上的单调区间（不必证明）.

例 7. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，若对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则称

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有性质 P. 设 $f(x)$ 在[1, 3]上具有性质 P, 现给出如下命题:

① $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的图像时连续不断的;

② $f(x)$ 在 $[1,\sqrt{3}]$ 上具有性质 P;

③若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值1, 则 $f(x)=1, x\in[1,3]$;

④对任意 $x_1,x_2,x_3,x_4\in[1,3]$, 有 $f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})\le\frac{1}{4}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$

其中真命题是(　　)

A. ①②　　B. ①③　　C. ②④　　D. ③④

例 8. 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

（1）求证函数 $f(x)$ 的图像在 y 轴的一侧;　（2）求证函数 $f(x)$ 在定义域内是严格增函数.

【拓展】例 9. 若函数 $f(x)=x^2+4x+3$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值为 $g(t)$，求 $g(t)$.

例 10. 设 $a\in R$，函数 $f(x)=\left|x^2+ax\right|$

（1）若 f（x）在[0，1]上单调递增，求 a 的取值范围;

（2）记 M（a）为 f（x）在[0，1]上的最大值，求 M（a）的最小值.

【配套练习】

★1．定义域R上的函数$f(x)$对任意两个不相等的实数a,b，总有$\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}>0$，则必有(　　)

A．函数$f(x)$先增后减

B．函数$f(x)$先减后增

C．函数$f(x)$是R上的增函数

D．函数$f(x)$是R上的减函数

★2．在区间$(-\infty,0)$上为增函数的是(　　)

A．$y=1$　　B．$y=\dfrac{x}{1-x}+2$

C．$y=-x^2-2x-1$　　D．$y=1+x^2$

★3．已知函数$f(x)=(m-1)x^2+(m-2)x+(m^2-7m+12)$为偶函数，则$m$的值是(　　)

A．1　B．2　C．3　D．4

★★4．如果奇函数$f(x)$在区间$[3,7]$上是增函数且最大值为5，那么$f(x)$在区间$[-7,-3]$上是()

A．增函数且最小值是-5　　B．增函数且最大值是-5

C．减函数且最大值是-5　　D．减函数且最小值是-5

★★5．设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x-1(x\ge 0)\\ \dfrac{1}{x}(x<0)\end{cases}$，若$f(a)<a$，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．（－1，+∞）　B．（－∞，－1）　C．（3，+∞）　D．（0，1）

★★6．设$a>0$，函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图象关于直线$x=1$对称，则$f(1),f(\sqrt{2}),f(\sqrt{3})$之间的大小关系是（　　）

A．$f(1)<f(\sqrt{2})<f(\sqrt{3})$　　B．$f(\sqrt{3})<f(\sqrt{2})<f(1)$

C．$f(1)<f(\sqrt{3})<f(\sqrt{2})$　　D．$f(\sqrt{2})<f(\sqrt{3})<f(1)$

★★7．函数$y=\sqrt{5-4x-x^2}$的递增区间是（　　）

A．$(-\infty,-2)$　B．[－5，－2]　C．[－2，1]　D．$[1,+\infty)$

★★8．函数$y=2x+\sqrt{x+1}$的值域是____________.

★★9．若函数 $f(x)=\dfrac{ax^2-1}{x}$ 在（2，3）上为增函数，则实数 a 的取值范围是________.

★★10．已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 是 $(-\infty,0)$ 上的减函数，且 $f(x)$ 的最小值为正数，则 $f(x)$ 的解析式可以为__________________.（只要写出一个符合题意的解析式即可，不必考虑所有可能情形）

★★11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geq 0\\ ax^2-2x, x<0\end{cases}$ 是奇函数，则 a=____，f（f（1））=____.

★★12．奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数，在区间 $[3,6]$ 上的最大值为 8，最小值为-1，则 $2f(-6)+f(-3)$=___________.

★★★13．试用定义讨论并证明函数 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}(a\neq\dfrac{1}{2})$ 在（－∞，－2）上的单调性.

★★★14．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-1,1\right)$，且同时满足下列条件：(1) $f(-x)=-f(x)$；(2) $f(x)$ 在定义域上单调递减；(3) $f(1-a)+f(1-a^2)<0,$ 求 a 的取值范围.

★★★15．已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2, x\in\left[-5,5\right]$.

① 当 $a=-1$ 时，求函数的最大值和最小值；

② 求实数 a 的取值范围，使 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-5,5\right]$ 上是单调函数.

【拓展】

★★★★16．函数 $f(x)$ 对于任意的实数 x，y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立，且当 $x>0$ 时 $f(x)<0$ 恒成立.

（1）证明函数 $f(x)$ 的奇偶性；

（2）若 $f(1)=-2$，求函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值；

（3）解关于x的不等式 $\frac{1}{2}f(-2x^2)-f(x)>\frac{1}{2}f(4x)-f(-2)$

第 16 讲 函数的应用

【知识梳理】

1.数学是实际问题的抽象，而数学又可以解决实际问题．当我们要用数学方法来解决实际问题时，首先要把问题中的有关变量及其关系用数学的形式表示出来，就像我们过去学习“列方程（组）解应用题”时用到了“设、列、解”这几个步骤.

当我们要用数学方法解决实际问题时，首先要把问题中的有关变量及其关系用数学的形式表示出来。通常，这个过程叫做建模。而实践中的大量问题是变量之间的关系问题，因此建立变量之间的函数关系是很重要的。

2.解答函数应用题的基本步骤

实际问题(文字语言)$\Rightarrow$数学问题(数量关系与函数模型)$\Rightarrow$建模(数学语言)$\Rightarrow$求模(求解数学问题)$\Rightarrow$反馈(还原成实际问题的解答).

3.函数的零点：

定义：一般地，如果函数$y=f\left(x\right)$在实数a处的值等于零即$f\left(a\right)=0$，则a叫做这个函数的零点。对于任意函数，只要它的图像是连续不间断的，其函数的零点具有下列性质：当它通过零点（不是偶次零点）时函数值变号；相邻两个零点之间的所有的所有函数值保持同号。

4.二分法：

定义：对于区间$\left[a,b\right]$上连续的，且$f\left(a\right)-f\left(b\right)<0$的函数$y=f\left(x\right)$，通过不断地把函数$f\left(x\right)$的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，从而等到零点近似值的方法，叫做二分法。

用二分法求函数零点的近似值的步骤：

第一步：确定区间$\left[a,b\right]$，验证：$f(a)\cdot f(b)<0$，给定精确度；

第二步：求区间$\left[a,b\right]$得中点x_1；

第三步：计算$f\left(x_1\right)$；若$f\left(x_1\right)=0$，则x_1就是函数零点；若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$，则令$b=x_1$；若$f(x_1)\cdot f(b)<0$，则令$a=x_1$

第四步：判断是否达到精确度ε，即若$\left|a-b\right|<\varepsilon$，则得到零点近似值$a$ (或b)，否则重复第二、三、四步。

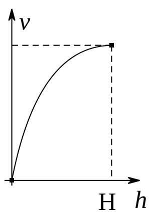
5.在学习了函数及其性质之后，我们可用函数的观点来考察方程、不等式的解。

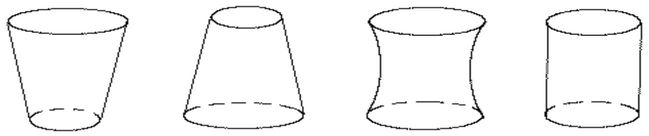
【典型例题】

例 1.某林场计划第一年造林 10000 亩，以后每年比前一年多造林 20%，则第四年造林（　　）.

A. 14400 亩　　B. 172800 亩　　C. 17280 亩　　D. 20736 亩

例 2.向高为H的水瓶中注水，注满为止，如果注水量V与深h的函数关系的图象如右图所示，那么水瓶的形状是（　　）.





(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

例 3. $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，$h(x)=\log_2 x$，当 $x\in(4,+\infty)$ 时, 三个函数增长速度比较, 下列选项中正确的是（　　）.

A. $f(x)>g(x)>h(x)$　　　　B. $g(x)>f(x)>h(x)$

C. $g(x)>h(x)>f(x)$　　　　D. $f(x)>h(x)>g(x)$

例 4. 能使不等式 $\log_2 x<x^2<2^x$ 成立的自变量 x 的取值范围是（　　）.

A. $x>0$　　B. $x>2$　　C. $x<2$　　D. $0<x<2$

例 5. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a，b]$ 上的图象不间断，并且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则这个函数在这个区间上(　　)

A. 只有一个变号零点

B. 有一个不变号零点

C. 至少有一个变号零点

D. 不一定有零点

例 6. 用二分法求函数 $f(x)=x^3-2$ 的零点时，初始区间可选为(　　)

A. (0, 1)　　　　B. (1, 2)

C. (2, 3)　　　　D. (3, 4)

例 7. 若方程 $2ax^2-x-1=0$ 在（0，1）恰好有一解，求 a 的取值范围.

例 8. 借助计算器或计算机用二分法求方程 $3^x-x^2=0$ 的一个近似解.（精确到 0.01）

例 9. 函数 $f(x)=2x+7$ 的零点为___________

例 10. 判断函数 $f(x)=x^2-7x+12$ 的零点个数

例 11. 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象为连续不断的一条曲线，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $f(a)f(b)>0$，不存在实数 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$；

B. 若 $f(a)f(b)<0$，存在且只存在一个实数 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$；

C. 若 $f(a)f(b)>0$，有可能存在实数 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$；

D. 若 $f(a)f(b)<0$，有可能不存在实数 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$.

例 12. 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是　　　（　　）

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

例 13. 求函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点的个数，并确定零点所在的区间 $[n, n+1]$ $(n\in Z)$.

例 14. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a\cdot c<0$，则函数的零点个数是（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 0 个　　D. 无法确定

例 15. 若关于 x 的方程 $x^2+(k-2)x+2k-1=0$ 的两实数根中，一根在 0 和 1 之间，另一根在 1 和 2 之间，求实数 k 的取值范围.

例 16. 某蛋糕厂生产某种蛋糕的成本为 40 元/个，出厂价为 60 元/个，日销售量为 1000 个. 为适应市场需求，计划提高蛋糕档次，适度增加成本，若每个蛋糕成本增加的百分率为 x（$0<x<1$），则每个蛋糕的出厂价相应提高的百分率为 $0.5x$，同时预计日销售量增加的百分率为 $0.8x$，已知日利润=（出厂价—成本）×日销售量，且设增加成本后的日利为 y.

（1）写出 y 与 x 的关系式；　（2）为使日利润最大，问 x 应取何值？

例 17. 心理学家发现，学生的接受能力依赖于老师引入概念和描述问题所用的时间．讲座开始时，学生的兴趣激增，中间有一段不太长时间，学生的兴趣保持较理想的状态，随后学生的注意力开始分散．分析结果和实验表明，用 f（x)表示学生掌握和接受概念的能力，x 表示提出和讲授概念的时间（单位：分)，可有以下的公式：

$$f(x)=\begin{cases}-0.1x^2+2.6x+43, & (0<x\le 10)\\ 59, & (10<x\le 16)\\ -3x+107, & (16<x\le 30)\end{cases}.$$

问开讲后多少分钟，学生的接受能力最强？能维持多长时间？

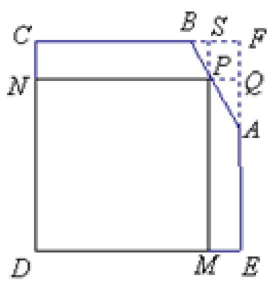
例 18. 某产品生产厂家根据以往的生产销售经验得到下面有关生产销售的统计规律：每生产产品 x（百台），其总成本为 $G(x)$（万元），其中固定成本为 2.8 万元，并且每生产 1 百台的生产成本为 1 万元（总成本=固定成本+生产成本）. 销售收入 $R(x)$（万元）满足 $R(x)=\begin{cases}-0.4x^2+4.2x(0\le x\le 5)\\ 11\ ,(x>5)\end{cases}$，

假定该产品产销平衡（即生产的产品都能卖掉），根据上述统计规律，请完成下列问题：

（1）写出利润函数 $y=f(x)$ 的解析式（利润=销售收入－总成本）；

（2）工厂生产多少台产品时，可使盈利最多？

例 19. 有一块铁皮零件，其形状是由边长为 40 cm 的正方形截去一个三角形 ABF 所得的五边形 $ABCDE$，其中 $AF=12$ cm，$BF=10$ cm，如图所示. 现在需要用这块材料截取矩形铁皮 $DMPN$，使得矩形相邻两边分别落在 CD，DE 上，另一顶点 P 落在边 CB 或 BA 边上. 设 $DM=x$ cm，矩形 $DMPN$ 的面积为 y cm^2.



（1）试求出矩形铁皮 $DMPN$ 的面积 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域.

（2）试问如何截取（即 x 取何值时），可使得到的矩形 $DMPN$ 的面积最大？

【配套练习】

★1．函数 $y=x^3-x^2-4x+4$ 的零点是_________.

★2. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+6x-1$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_________.

★★3. 已知方程 $x^2+2px+1=0$ 有一个根大于 1，有一个根小于 1，则 p 的取值范围为__________.

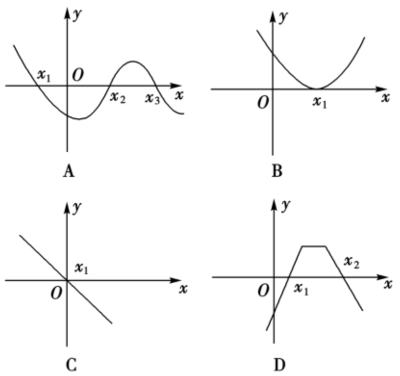
★★4. 函数 $f(x)=2(m+1)x^2+4mx+2m-1$ 的一个零点在原点，则 m 的值为________.

★★5. 函数 $f(x)=x^3+2x^2-3x-6$ 的一个为正数的零点是___________(精确到 0.1).

★★6. 试用计算器求出函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=2x+2$ 的图象交点的横坐标________(精确到 0.1).

★★7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$ 且函数 $g(x)=f(x)+x-a$ 只有一个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

★★8. 函数图象与 x 轴均有公共点，但不能用二分法求公共点横坐标的是(　　).



★★9. 用二分法求方程 $x^3+3x-7=0$ 在(1,2)内近似解的过程中，设函数 $f(x)=x^3+3x-7$，算得 $f(1)<0$，$f(1.25)<0$，$f(1.5)>0$，$f(1.75)>0$，则该方程的根落在区间(　　)

A．(1, 1.25)　　　　B．(1.25, 1.5)

C．(1.5, 1.75)　　　　D．(1.75, 2)

★★10. 函数 $f(x)=2^x+x^3-2$ 在区间 $(0,1)$ 内的零点个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

★★11. 判断下列结论是否正确，若不正确，请使用函数图象举出反例：

（1）已知函数 $y=f(x)$ 在区间$[a，b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)$ 在区间$(a，b)$内有且仅有一个零点.

（2）已知函数 $y=f(x)$ 在区间$[a，b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在区间$(a，b)$内没有零点.

（3）已知函数 $y=f(x)$ 在区间$[a，b]$满足 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)$ 在区间$(a，b)$内存在零点.

★★12. 有甲、乙两种商品，经销这两种商品所能获得的利润依次是 p 万元和 q 万元，它们与投入的资金 x 万元的关系有经验公式：$p=\frac{1}{10}x$，$q=\frac{2}{5}\sqrt{x}$．现有资金 9 万元投入经销甲、乙两种商品，为了获取最大利润，问：对甲、乙两种商品的资金分别投入多少万元能获取最大利润？

★★13. 某工厂要建造一个无盖长方体水池，底面一边长固定为 8 m，最大装水量为 72 m^3，池底和池壁的造价分别为 2a 元/m^2、a 元/m^2，怎样设计水池底的另一边长和水池的高，才能使水池的总造价最低？最低造价是多少？

★★★14. 某厂生产某种零件，每个零件的成本为 40 元，出厂单价定为 60 元，该厂为鼓励销售商订购，决定当一次订购量超过 100 个时，每多订购一个，订购的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元，但实际出厂单价不能低于 51 元。

（1）当一次订购量为多少个时，零件的实际出厂单价恰降为 51 元？

（2）设一次订购量为 x 个时，零件的实际出厂单价为 P 元，写出函数 P=f (x)的表达式；

（3）当销售商一次订购 500 个零件时，该厂获得的利润是多少元？如果订购 1000 个时，利润又是多少元？（工厂售出一个零件的利润=实际出厂单价－成本）

★★★15. 提高过江大桥的车辆通行能力可改善整个城市的交通状况．在一般情况下，大桥上的车流速度 v（单位：千米/小时）是车流密度 x（单位：辆/千米）的函数．当桥上的的车流密度达到 200 辆/千米时，造成堵塞，此时车流速度为 0；当车流密度不超过 20 辆/千米时，车流速度为 60 千米/小时，研究表明；当 $20\le x\le 200$ 时，车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数．

（Ⅰ）当 $20\le x\le 200$ 时，求函数 $v(x)$ 的表达式；

（Ⅱ）当车流密度 x 为多大时，车流量（单位时间内通过桥上某观点的车辆数，单位：辆/每小时）$f(x)=xv(x)$ 可以达到最大，并求出最大值（精确到 1 辆/小时）

★★★16.某汽车公司曾在 2009 年初公告：2009 年销量目标定为 39.3 万辆；且该公司重事长极力表示有信心完成这个销量目标。

2006 年，某汽车年销量 8 万辆；

2007 年，某汽车年销量 18 万辆；

2008 年，某汽车年销量 30 万辆。

如果我们分别将 2006，2007，2008，2009 年定义为第一，二，三，四年，现在有两个函数模型：二次函数型 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq0$），指数函数型 $g(x)=a\cdot b^x+c$（$a\neq0$，$b\neq1$，$b>0$），哪个模型能更好地反映该公司年销量 y 与第 x 年的关系？

★★★★17. 某环线地铁按内、外环线同时运行,内、外环线的长均为 30 千米(忽略内、外环线长度差异).

(1)当 9 列列车同时在内环线上运行时,要使内环线乘客最长候车时间为 10 分钟,求内环线列车的最小平均速度;

(2)新调整的方案要求内环线列车平均速度为 25 千米/小时,外环线列车平均速度为 30 千米/小时.现内、外环线共有 18 列列车全部投入运行,要使内、外环线乘客的最长候车时间之差不超过 1 分钟,问:内、外环线应各投入几列列车运行?

★★★★18. 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药．对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定：用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药量的$\frac{1}{2}$，用水越多洗掉的农药量也越多，但总还有农药残留在蔬菜上．设用 x 单位量的水清洗一次以后，蔬菜上残留的农药量与本次清洗前残留的农药量之比为函数 $f\left(x\right)$．

（1）试规定 $f\left(0\right)$的值，并解释其实际意义；

（2）试根据假定写出函数 $f\left(x\right)$应该满足的条件和具有的性质；

（3）设 $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^{2}}$，现有 a $\left(a>0\right)$单位量的水，可以清洗一次，也可以把水平均分成 2 份后清洗两次，试问用哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药量比较少?说明理由

第 17 讲 反函数

【知识梳理】

1. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 C，由 $y=f(x)$ 求出 $x=g(y)$，如果对于 C 中的每个 y 值，在 A 中都有唯一的值和它对应，则 $x=g(y)$ 为一 y 为自变量的函数，叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $y=f^{-1}(x),(x\in C)$.

2. 反函数存在的条件：从定义域到值域上的一一映射确定的函数才有反函数.

3. 互为反函数的两个函数具有相同的单调性，它们的图像关于 $y=x$ 对称.

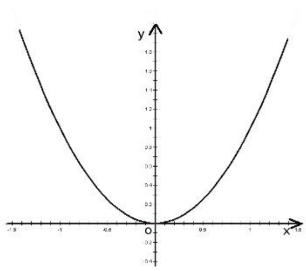
4.（1）定义域上的单调函数必有反函数；

(2)奇函数若存在反函数，其反函数也是奇函数；

(3)定义域为非单元素集的偶函数不存在反函数；

(4)周期函数在整个定义域内不存在反函数.

【典型例题】



例 1（1）$y=x^2$（$x\in R$）的反函数是____________

（2）$y=x^2$（$x\ge 0$）的反函数是____________

（3）$y=x^2$（$x<0$）的反函数是____________

例 2. 设 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数, 下列结论正确的是

(　　　)

(A) $f^{-1}(2)=2$　　(B) $f^{-1}(2)=4$　　(C) $f^{-1}(4)=2$　　(D) $f^{-1}(4)=4$

例 3．求下列函数的反函数：

（1）$y=4x+2$

（2）$y=x^3+1$

（3）$y=x^2+1(x\ge 0)$

（4）$y=\dfrac{3x+1}{4x+2}(x\in R,x\ne -\dfrac{1}{2})$

例 4. 已知 f(x)=4^x-2^{x+1}，求 $f^{-1}(0)$。

例 5. 求函数 y=$\dfrac{2x}{x+1}$ （x∈（-1，+∞））的图像与其反函数图像的交点。

例 6. 若函数 $y=f\left(x\right)$ 存在反函数，则方程 $f\left(x\right)=c$， c 为常数　　　　（　　　）

$A.$ 有且只有一个实根　　　　$B.$ 至少有一个实根

$C.$ 至多有一个实根　　　　$D.$ 没有实根

例 7. 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的反函数，若 $[1+f^{-1}(a)][1+f^{-1}(b)]=8$，则 $f(a+b)=$

（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\log_2 3$

例 8. 已知 f(x)=2^x+1 的反函数为 f^{-1}(x)，求 f^{-1}(x)<0 的解集。

例 9. 函数 f(x)=$\dfrac{ax+b}{x+c}$ (a、b、c 是常数)的反函数是 $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$，求 a、b、c 的值。

例 10. 实数 a 、b 、c 、d 满足什么条件时？函数 $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ （$c\neq 0$，$bc-ad\neq 0$）与其反函数 $y=f^{-1}\left(x\right)$ 是同一函数。

例 11. 已知 $f(x)=x^2-2x+2, x\in[a,b], a\geq 1$，如果它的反函数定义域也是 $[a,b]$，求 a 、b 的值.

例 12. 已知函数 $f(x)=a^{x-1}-2,(a>0,a\neq 1)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为集合 A，集合 $B=\{x\,|\,|x-t|\leq\frac{1}{2},x\in R$. 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 t 的取值范围.

【配套练习】

★1. 若函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a=$______

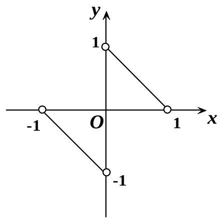
★2．若不等式 $ax^2+x+2a>0$ 的解为 $1<x<2$，则 $a=$____．

★★3．对于实数 x，不等式 $|x+1|-|x-2|>a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____．

★★4. 设关于 x 的方程：$2^x=1+\lg a$ 有负实数解，实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$a<1$（B）$0<a<1$（C）$\frac{1}{10}<a<1$　（D）$a>\frac{1}{10}$

★★5. 如图 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$，则 $f^{-1}(x)-f^{-1}(-x)>-1$ 的解集为（　　）



A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,1)$

★★6. 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x+y=0$ 对称，则 $y=f(x)$ 的反函数是　　　　（　　　　）

A．$y=g(x)$　　B．$y=g(-x)$　　C．$y=-g(x)$　　D．$y=-g(-x)$

★★7. 函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数的值域为__________。

★★8. 函数 $y=\sqrt{x^2-1}$（$x\le-1$）的反函数的定义域为_____________。

★★9. 函数 $y=\frac{a}{x+1}$ 的反函数的图像经过点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，则实数 $a=$_______。

★★10. 如果一次函数 $y=3x-m$ 与 $y=nx+2$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，那么 $m=$_____，

$n=$_______.

★★11. 函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$（$x>0$ 在区间 $[2,4$ 上存在反函数，则实数 a 的取值范围为___________.

★★12. “函数 $f(x)(x\in R)$ 存在反函数”是“$f(x)$ 在 R 上为增函数”的________条件.

★★13. 求下列函数的反函数：

（1） $y=\sqrt{x^2-1},(x\le -1)$.

（2） $y=x^2+4x+1,(x\ge 0)$

★★★14. 设函数 $f(x)=\dfrac{1-2x}{1+x}$，又函数 $g(x)$ 与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于 $y=x$ 对称，求 $g(2)$ 的值.

★★★15. 已知函数 $y=x(|x|-2),x\in[-3,3]$

（1）判断它的奇偶性，并指出它的单调增区间；

（2）该函数是否存在反函数？若存在，试求出反函数；若不存在，试说明理由.

★★★★16. 设 $a\in R$，$f(x)$ 为奇函数，且 $f\left(2x\right)=\dfrac{a\cdot 4^{x}-a^{-2}}{4^{x}+1}$

（1）试求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的解析式，及其定义域；

（2）设 $g(x)=\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1+x}{k}$，若 $x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$时，$f^{-1}(x)\le g(x)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

第 18 讲　期末综合复习

【知识梳理】

1. 集合与逻辑
2. 等式与不等式
3. 幂、指数与对数
4. 幂函数、指数函数与对数函数
5. 函数的概念、性质及应用

【典型例题】

1．全集$U=\{-1,-2,-3,-4,0\}$，集合$A=\{-1,-2,0\},B=\{-3,-4,0\}$，则$\overline{A}\cap B$（　）

A．$\{0\}$　　B．$\{-3,-4\}$　　C．$\{-1,-2\}$　　D．ϕ

2．若集合$A=\{-1,1\}$，$B=\{x\,|\,mx=1\}$，且$A\bigcup B=A$，则m的值为（　　）

A．1　B．-1　C．1或-1　D．1或-1或0

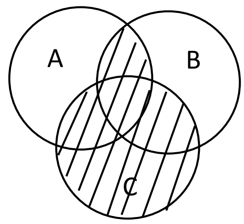
3．若集合$M=\{(x,y)\big|x+y=0\},N=\{(x,y)\big|x^2+y^2=0,x\in R,y\in R\}$，则有（　　）

A．$M\bigcup N=M$　B．$M\bigcup N=N$　C．$M\bigcap N=M$　D．$M\bigcap N=\varnothing$

4．已知集合$A=\{a，4\}$，$B=\{2，a^2\}$，且$A\cap B=\{4\}$，则$A\cup B=$（　　）

A．{2，4}　B．{－2，4}　C．{－2，2，4}　D．{－4，2，4}

5．表示图形中的阴影部分(　　)



A．$(A\cup C)\cap(B\cup C)$

B．$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

C．$(A\cup B)\cap(B\cup C)$

D．$(A\cup B)\cap C$

6．当$x\in$R时，不等式$kx^2-kx+1>0$恒成立，则k的取值范围是(　　)

A．(0，＋∞)　　B．[0，＋∞)

C．[0,4)　　D．(0,4)

7．若$a>1$，则$a+\dfrac{1}{a-1}$的最小值是(　　)

A．0　　B．2

C．$\dfrac{2\sqrt{a}}{a-1}$　　D．3

8．若关于 x 的不等式$(1+k^2)x\leqslant k^4+4$的解集是 M，则对任意实常数 k，总有（　　）

A．2∈M，0∈M　B．2∉M，0∉M　C．2∈M，0∉M　D．2∉M，0∈M

9．已知不等式$(x+y)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y})\geq 9$对任意正实数 x，y 恒成立，则正实数 a 的最小值为（　　）

A．8　　B．6　　C．4　　D．2

10、函数 $f(x)=\lg(x-1)$ 的定义域是（　　）

A. $(2,+\infty)$　　　　B. $(1,+\infty)$　　　　C. $[1,+\infty)$　　　　D. $[2,+\infty)$

11、下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数的是（　　　）

A. $y=-x^2$　　　　B. $y=\dfrac{1}{x}$　　　　C. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　　　D. $y=\log_2 x$

12、已知函数 $y=a^x$ 的反函数的图象过点 $(9,2)$，则 a 的值为（　　　）

A. 3　　B. -3　　C. $\log_2 9$　　D. $\dfrac{1}{3}$

13、函数 $y=x^2+x\ (-1\le x\le 3)$ 的值域是（　　）

A. $[0,12]$　　B. $[-\dfrac{1}{4},12]$　　C. $[-\dfrac{1}{2},12]$　　D. $[\dfrac{3}{4},12]$

14. 若 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，已知下列不等式：

①$a+b<ab$；②$|a|>|b|$；③$a<b$；④$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$；

⑤$a^2>b^2$；⑥$2^a>2^b$.

其中正确的不等式的序号为________.

15、幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(3,\sqrt{3}\right)$，则 $f(x)$ 的解析式是____________

16、$\sqrt{(3-\pi)^2}$ =___________；　　$(2\dfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\log_3 9$ =___________.

17、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & 0\le x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$，则 $f(2)=$_____；若 $f(x_0)=8$，则 $x_0=$_____.

18、已知函数 $f(x)$ 满足：对任意实数 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，且 $f(x+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，写出一个满足条件的函数，则这个函数可以写为 $f(x)=$______________（注：只需写出满足条件的一个函数即可）

19. 若两个正实数 x,y 满足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，且不等式 $x+\dfrac{y}{4}<m^2-3m$ 有解，则实数 m 的取值范围是____________.

20. 设 $A=\left\{x\mid x^2+px+q=0\right\},B=\left\{x\mid qx^2+px+1=0\right\}$，其中 $p,q\neq 0$，同时满足① $A\cap B\neq\varnothing$；② $\left(\eth_R B\right)\cap A=\{-2\}$。求 p,q 的值。

21．已知集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x<5\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-15\leqslant 0\}$，$C=\{x\mid -a<x\leqslant a+3\}$．

（1）求 $A\cap B$;

（2）若 $C\cap A=C$，求 a 的取值范围．

22. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)=x^2-(3-a)x+2(1-a)$（其中 $a\in R$）

（1）解关于 x 的不等式 $f(x)>0$；

（2）若不等式 $f(x)\geq x-3$ 对任意 $x>2$ 恒成立，求 a 的取值范围

23．解关于 x 的不等式 $ax^2-(a+1)x+1<0$.

24. 若不等式 $x^2+ax+1\geq 0$ 对任意 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 恒成立，求 a 的最小值.

25. 已知函数 $f(x)=2x-\dfrac{a}{x}$，且 $f(1)=3$

（1）求 a 的值；

（2）判断函数的奇偶性；

（3）判断函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数还是减函数？并证明.

26. 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，并且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=1$.

（1）求 $f(1)$ 的值；

（2）若存在实数 m，使得 $f(m)=2$，求 m 的值；

（3）如果 $f(x)+f(2-x)<2$，求 x 的取值范围.

【配套练习】

★1、函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$ 的图像关于(　　　)

A. y 轴对称　　B. 直线 $y=x$　　C. 坐标原点对称　　D. 直线 $y=-x$

★2、方程 $x^3-x-3=0$ 的实数解落在的区间是(　　)

A. $[-1,0]$　　B. $[0,1]$　　C. $[1,2]$　　D. $[2,3]$

★★3、设 $a>1$，则 $\log_{0.2}a$ 、0.2^a 、$a^{0.2}$ 的大小关系是(　　)

A. $0.2^a<\log_{0.2}a<a^{0.2}$　　B. $\log_{0.2}a<0.2^a<a^{0.2}$

C. $\log_{0.2}a<a^{0.2}<0.2^a$　　D. $0.2^a<a^{0.2}<\log_{0.2}a$

★★4、若 $\log_a\dfrac{2}{3}<1$，则 a 的取值范围是（　　　）

A. $(\dfrac{2}{3},1)$　B. $(\dfrac{2}{3},+\infty)$　C. $(0,\dfrac{2}{3})\cup(1,+\infty)$　D. $(0,\dfrac{2}{3})\cup(\dfrac{2}{3},+\infty)$

★★5、设偶函数 $f(x)$ 的定义域为 R，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 是增函数，则 $f(-2)$，$f(\pi)$，$f(-3)$ 的大小关系是(　　)

A. $f(\pi)>f(-3)>f(-2)$　　B. $f(\pi)>f(-2)>f(-3)$

C. $f(\pi)<f(-3)<f(-2)$　　D. $f(\pi)<f(-2)<f(-3)$

★★6. 已知全集 U=A∪B 中有 m 个元素，$\overline{A}\cup\overline{B}$ 中有 n 个元素。若 A∩B 非空，则 A∩B 的元素个数为（　　）

A. mn　B. m+n　C. n－m　D. m－n

★★7. 已知全集为 R，集合 $A=\{x\mid x<3或x\ge 7\},B=\{x\mid x<a\}$. 若 $\overline{A}\cap B\neq\phi$, 则 a 的取值范围为（　　）

A. $a>3$　　B. $a\ge 3$　　C. $a\ge 7$　　D. $a>7$

★★8. 设 S 是整数集 Z 的非空子集，如果 $\forall a,b\in S$，有 $ab\in S$，则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T,V 是 Z 的两个不相交的非空子集，$T\cup V=Z$，且 $\forall a,b,c\in T$，有 $abc\in T$；$\forall x,y,z\in V$，有 $xyz\in V$，则下列结论恒成立的是(　　　)

A. T,V 中至少有一个关于乘法是封闭的

B. T,V 中至多有一个关于乘法是封闭的

C. T,V 中有且只有一个关于乘法是封闭的

D. T,V 中每一个关于乘法都是封闭的

★★9. 设 $U=R,A=\left\{x\mid a\le x\le b\right\},\complement_U A=\left\{x\mid x>4或x<3\right\}$，则 $a=$ ______，$b=$ ______。

★★10. 50 名学生参加甲、乙两项体育活动，每人至少参加了一项，参加甲项的学生有 30 名，参加乙项的学生有 25 名，则仅参加了一项活动的学生人数为__________。

★11．若 $A=\{1,4,x\},B=\{1,x^2\}$ 且 $A\bigcap B=B$，则 $x=$____________。

★★12. 已知函数 $f(x)=1+\frac{|x|-x}{2}(-2<x\le 2)$.

(1)用分段函数的形式表示该函数；

(2)画出该函数的草图；

(3)利用图像写出该函数的值域、单调递减区间.

★★★13．若 a，b，c＞0 且 $a(a+b+c)+bc=4-2\sqrt{3}$，求 2a+b+c 的最小值

★★★★14．对于 c＞0，当非零实数 a，b 满足 $4a^2-2ab+b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时，求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}$ 的最小值

★★★15. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，

(1) 证明函数 $f(x)$ 是奇函数；

(2) 证明函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是增函数；

(3) 求函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的值域。

★★★★16. 已知 $f(x)=a^x+\frac{x-2}{x+1}(a>1)$

(1) 证明函数 f(x) 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数；

(2) 证明方程 $f(x)=0$ 没有负数解.